

Enseignement du troisième cycle
de la Physique en Suisse Romande (CICP)

Semestre d'été 1970

<p>METHODES D'ANALYSE GLOBALE EN HYDRODYNAMIQUE</p>

par
D. RUELE

Notes par J.-P. Eckmann

Les notes qui suivent correspondent à cinq semaines de cours que j'ai fait à Lausanne au printemps 1970 dans le cadre de la CICP. La matière des exposés a été fournie principalement par un mémoire écrit en collaboration avec F. Takens (*On the Nature of Turbulence*, à paraître). Le but que j'ai poursuivi a été de démontrer l'importance pour la physique des méthodes et résultats récents de l'analyse globale. L'extension de l'analyse globale aux variétés à un nombre infini de dimensions ne pourra que renforcer cette importance.

La rédaction des notes est due à J.-P. Eckmann qui s'est attaché à produire rapidement un texte utilisable par les auditeurs. Il l'a fait avec enthousiasme, parfois avec humour, et je l'en remercie.

Genève, le 15 mai 1970.

D. Ruelle

TABLE DES MATIERES

- Revue des phénomènes typiques des systèmes dissipatifs
- Situation générale du problème

Chapitre I. Revue et interprétation des résultats

- 1 Quelques notions de la théorie des équations différentielles
 - Définitions
 - Critique des mouvements quasi périodiques
 - Existence d'attracteurs étranges
- 2 Les résultats
 - Récapitulation et remarques

Chapitre II. Les théorèmes

- 3 Réduction à deux dimensions
- 4 La bifurcation de Hopf
- 5 Bifurcation de Hopf pour des difféomorphismes
- 6 Attracteurs étranges "près" d'un champ de vecteurs constant

Chapitre III. Applications

- 7 Bifurcation de solutions stationnaires
 - L'instabilité de Taylor du flot de Couette
- 8 Points critiques d'un champ de vecteurs en présence d'un groupe d'invariance

Références

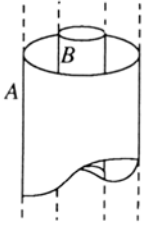
Première leçon.

Revue des Phénomènes Typiques des Systèmes Dissipatifs.

Nous considérons quelques exemples typiques de fluides visqueux.

1) Soit donné une boîte, remplie d'un fluide visqueux. Alors, s'il n'agit aucune force sur cette boîte, le liquide va se trouver après un certain temps dans l'état d'équilibre. L'action sur le système sera paramétrée dans tout le cours par la variable $\mu \geq 0$. $\mu = 0$ signifie que l'on n'agit pas sur le système.

2) Nous considérons le système suivant : Soient donnés deux cylindres infiniment longs, coaxiaux.

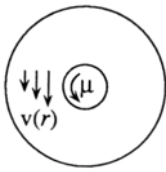


On suppose un liquide visqueux entre les deux.

Nous faisons l'expérience suivante :

Le cylindre A est fixe, le cylindre B est tourné avec une vitesse angulaire μ . Il n'y a pas d'autres forces.

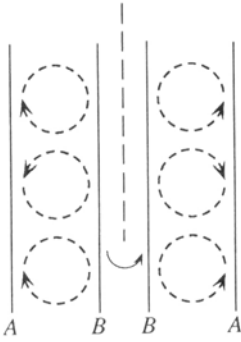
Alors si $\mu = 0$ le liquide en équilibre est au repos. Si μ est assez petit $\mu < \mu_1$ alors le liquide est dans un état *stationnaire* :



Il n'est pas au repos, il "tourne" autour du cylindre B avec une vitesse $v(r)$ constante dépendant seulement de la distance de l'axe de rotation. Sur A , $v(r) = 0$. Sur B , $v(r) =$ vitesse de la surface de B .

Cet état stationnaire s'appelle "écoulement de Couette".

Si μ est encore plus grand, $\mu > \mu_1$, on aboutit à la formation de "cellules de Taylor". C'est-à-dire qu'en plus du mouvement de rotation horizontal il apparaît un mouvement circulaire dans le plan vertical.

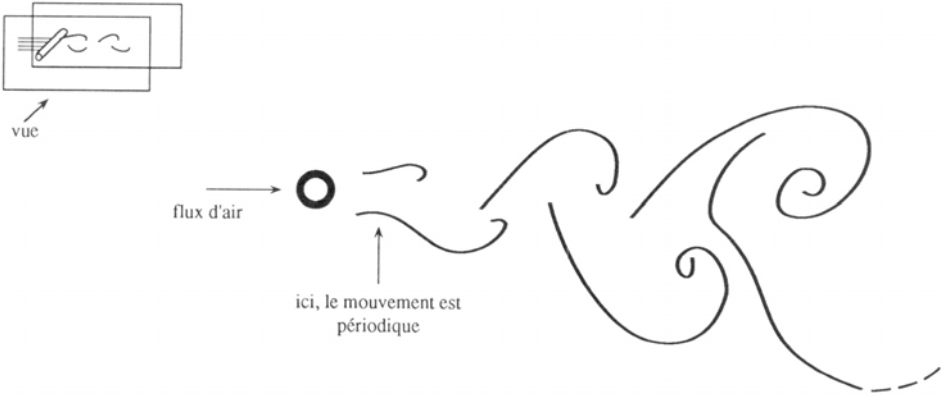


Le mouvement du fluide est donc toroïdal.
 Les "couches" toroïdales sont appelées
 "cellules de Taylor".
 N.B. La symétrie du système a changé.

La raison physique qualitative pour ce phénomène est la force centrifuge.

Si μ est encore plus grand il peut se produire des phénomènes périodiques. Un joli exemple est le sifflet :

3) Pour le sifflet, le mouvement est *périodique* au cours du temps au moins dans un voisinage de l'obstacle ; ici nous dessinons l'exemple d'une barre circulaire, vue de l'axe. (cf. "Scientific American" Janvier 1970, p. 40)



4) Si μ est encore plus grand, il se produit la *turbulence*. Ce mouvement est très compliqué, irrégulier et chaotique. Parmi les traités mathématiques sur la turbulence nous rappelons les deux suivants.

Leray a discuté, dans [1], les équations de Navier-Stokes en détail. Nous citons ici sa conclusion ([1], p. 245).

"Nous avons essayé d'établir l'existence d'une solution des équations de Navier correspondant à un état initial donné : nous n'y avons réussi qu'en renonçant à la régularité de la solution en certains instants, convenablement choisis, dont l'ensemble est de mesure nulle :

en ces instants la solution n'est assujettie qu'à une condition de continuité très large et à une condition exprimant la non croissance de l'énergie cinétique."

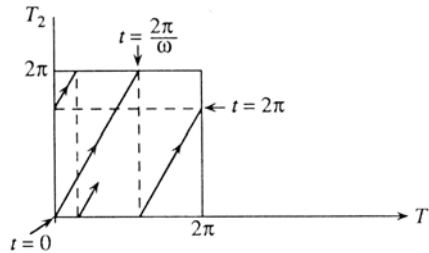
Un deuxième aspect de la turbulence a été fourni par Landau et Lifschitz [2] qui ont proposé que les paramètres physiques v décrivant le fluide en mouvement turbulent sont des fonctions *quasi-périodiques* dans le temps : c'est-à-dire

$$v(t) = f(\omega_1 t, \dots, \omega_k t)$$

où f est périodique de période 2π dans chacun de ses arguments (séparément), et où les fréquences $\omega_1, \dots, \omega_k$ ne sont pas reliées par de relations linéaires non-triviales $\sum_{i=1}^k n_i \omega_i$, à coefficients n_i entiers.

Exemple : Représentons la valeur de l'argument (mod 2π) d'une fonction en 2 variables, T_1 et T_2 , qui est quasi-périodique.

$$T_1 = t \quad , \quad T_2 = \omega t \quad \omega \text{ irrationnel}$$



Comme la pente est irrationnelle, il n'existe pas de t , tel que $(T_1(t), T_2(t)) = (0, 0)$, c'est-à-dire qu'on ne revient jamais au même endroit. Par contre, pour chaque $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ($< 2\pi$) il existe un t tel que $T_1(t) < \varepsilon_1$, $T_2(t) < \varepsilon_2$, c'est-à-dire qu'on revient aussi près de $(0, 0)$ qu'on veut.

Fin de l'exemple.

Il est à espérer que, si le nombre k de variables de f devient très grand (pour μ grand), cela mène à un comportement irrégulier et compliqué qui est typique pour le mouvement turbulent. Nous verrons plus tard qu'un système dissipatif (comme l'est le fluide visqueux) n'est en général pas décrit par des mouvements quasi-périodiques. (Pour la quasi-périodicité d'autres systèmes, cf. Moser [3].)

Dans ce cours, on va attaquer le problème d'une autre façon.

Situation générale du problème.

Dans cette section, le cadre général de l'exposé est *esquissé*. Les notions mathématiques utilisées ici seront introduites en détail dans les sections à suivre.

Pour nous orienter nous considérons un fluide occupant une région D de l'espace \mathbf{R}^3 . Nous imposons les propriétés et restrictions suivantes : Pas d'effets thermiques et incompressibilité. L'état du fluide est alors décrit par un *champ de vitesses*, dépendant du temps, c'est-à-dire que dans chaque point p de D est donné un vecteur $v_p(t)$, décrivant la vitesse du fluide en p au temps t . Pour un t fixe, l'ensemble des $v_p(t)$, noté $v(t)$ est un *champ vectoriel*, et soit H l'espace de tous les champs vectoriels. (H est un espace vectoriel de dimension infinie.)

L'évolution du champ de vitesses dans le temps est donnée par l'équation de Navier-Stokes. On ne s'intéresse pas à la forme précise de cette équation qui est non-linéaire et d'ailleurs assez compliquée. Nous écrivons simplement

$$\frac{dv}{dt} = X_\mu(v). \quad (1)$$

Ici $X_\mu : H \rightarrow H$ est un champ vectoriel dépendant de v et du paramètre μ . Des spécifications de cette dépendance seront données plus tard.

Remarque : $\frac{d}{dt}$ est, dans la notation habituelle des équations de Navier-Stokes, la dérivée partielle, le "reste" étant incorporé dans X_μ .

Le but de notre étude sera une **discussion de la nature des solutions** de (1), en faisant quelques hypothèses d'une nature générale sur X_μ . On va voir que le mouvement du fluide peut montrer un comportement chaotique si μ croît suffisamment. Ceci justifie la notion de turbulence et va donner une idée de sa signification, *sans connaître X_μ en détail*.

Notons tout de suite quelques réserves :

- Il n'existe pas un théorème d'existence et d'unicité globale. Nous supposons existence et unicité locale pour X , c'est-à-dire dans un voisinage d'un $v_0 \in H$ et d'un temps t_0 .
- Nous supposons H de dimension finie, plus précisément, nous remplaçons l' H original par un H de dimension finie. Cette opération sera justifiée dans certains cas à discuter plus tard.
- Nous n'étudierons que des déformations "génériques" du champ vectoriel v . Ceci veut dire qu'on exclut des déformations qui sont exceptionnelles dans un sens à décrire. Ceci correspond à l'exclusion d'une classe particulière de X .

(Il se peut que le X' correspondant à l'équation de Navier-Stokes tombe justement dans la classe particulière, comme il a des propriétés très spéciales [comme par exemple la nature locale de l'opérateur différentiel]. Néanmoins, il faut remarquer qu'un fluide visqueux à trois dimensions se comporte conformément aux propriétés que nous allons déduire pour le cas générique. Cette restriction est donc un peu justifiée *a posteriori*.)

I. Revue et interprétation des résultats.

1. Quelques notions de la théorie des équations différentielles.

Définitions.

Soit B une boule ouverte dans l'espace E^ν euclidien à $\nu < \infty$ dimensions.

$$B = \{x \mid |x| < R, x \in E^\nu\}.$$

E^ν est donc une version à un nombre fini de dimensions de l'espace des champs de vitesses. (Donc pas l'espace des positions). On écrira x au lieu de v .

Soit X un champ vectoriel sur la fermeture \overline{B} de B , à dérivées continues et bornées jusqu'à l'ordre r , $r \geq 1$. C'est-à-dire que sur $\overline{B} = \{x \mid |x| \leq R, x \in E^\nu\}$

$$\left| \frac{\partial^{|\rho|}}{\partial x^\rho} X^i(x) \right| \text{ est continu et fini pour } i = 1, \dots, \nu,$$

et pour tout $\rho, |\rho| \leq r$. Ici X^i est la i -ème composante du champ, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\nu)$, $|\rho| = \rho_1 + \dots + \rho_\nu$, $\rho_i \geq 0$ et

$$\frac{\partial^{|\rho|}}{\partial x^\rho} \equiv \frac{\partial^{|\rho|}}{\partial x_1^{\rho_1} \dots \partial x_\nu^{\rho_\nu}}.$$

L'ensemble des champs vectoriels forme un espace vectoriel \mathcal{B} sur les complexes. Cet espace peut être muni d'une norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|X\| = \sup_{i=1, \dots, \nu} \sup_{|\rho| \leq r} \sup_{x \in \overline{B}} \left| \frac{\partial^{|\rho|}}{\partial x^\rho} X^i(x) \right|$$

Cette norme fait de \mathcal{B} un espace de Banach. (La complétude est assurée par l'uniformité des valeurs absolues des dérivées sur la boule fermée \overline{B}).

Il sera utile d'avoir une notion d'un ensemble "grand" des champs de vecteurs dans \mathcal{B} . Cette notion est donnée par la définition d'un ensemble résiduel.

Définition : Un ensemble $E \subset \mathcal{B}$ est résiduel, si et seulement s'il contient l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts, denses dans \mathcal{B} .

Propriétés :

- Un ensemble résiduel est dense (Théorème de Baire).
- L'intersection dénombrable d'ensembles résiduels est résiduelle.
- Le complément d'un ensemble résiduel dans \mathcal{B} est l'union dénombrable d'ensembles partout non denses en \mathcal{B} .

Exemple : Considérons l'intervalle $I := [0, 1]$. Soit x_1, x_2, \dots une énumération des rationnels en I . Nous donnons une famille $\{A_i\}$ dénombrable d'ensembles ouverts denses en I . Soit $\varepsilon > 0$

$$A_1 = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^{(1)} \right) \cap I; \quad J_k^{(1)} \text{ est l'intervalle } \left(x_k - \frac{\varepsilon}{k!}, x_k + \frac{\varepsilon}{k!} \right).$$

$$A_i = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^{(i)} \right) \cap I; \quad J_k^{(i)} \text{ est l'intervalle } \left(x_k - \frac{1}{i} \frac{\varepsilon}{k!}, x_k + \frac{1}{i} \frac{\varepsilon}{k!} \right).$$

Evidemment, la longueur totale de A_i est majorée par $\frac{2}{i} \varepsilon$. Donc nous avons la situation suivante : $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ est un ensemble résiduel ; mais sa "longueur" est nulle.

Exemple : Les nombres rationnels $\in I$ ne forment pas un ensemble résiduel, puisque $\bigcap_{i=1}^{\infty} (I \setminus x_i) = I'$ est résiduel, et $I' \cap (\text{nombre rat} \in I) = \emptyset$.

Définition : Si une propriété est satisfaite par un ensemble résiduel de champs de vecteurs dans \mathcal{B} , cette propriété est appelée *générique*.

Une propriété générique est donc une propriété satisfaite par "presque tous" les champs de \mathcal{B} .

Nous sommes toujours intéressés par les équations différentielles de la forme

$$dx(t) | dt \dots X(x(t)) \tag{1'}$$

Définition : Une solution de (1'), satisfaisant $x(0) = x_0 \in B$ est appelée *courbe intégrale* passant par x_0 .

Théorème [6] : Dans le contexte établi dans la présente section il existe une et une seule courbe intégrale pour chaque $X \in \mathcal{B}$ et $x_0 \in B$, au moins pour des temps petits.*

Nous écrirons parfois $x(t) = \mathcal{D}_{X,t}(x_0)$ et $\mathcal{D}_{X,t}(U) = \bigcup_{x_0 \in U} \mathcal{D}_{X,t}(x_0)$ pour souligner la dépendance de $x(t)$ par rapport à X, t et x_0 . Il est utile de distinguer parmi certaines solutions particulières. Soit donné X . x_0 est appelé un *point fixe de X* si $x(t) \equiv x_0$ pour tout t . Si $x(\tau) = x_0$ pour $\tau > 0$ et si pour aucun $\tau', 0 < \tau' < \tau$ $x(\tau') = x_0$, alors on a une *orbite fermée* de période τ .

Nous discuterons plus tard le comportement des solutions "au voisinage" des points fixes et des orbites fermées.

Critique des mouvements quasi périodiques.

Une généralisation naturelle des mouvements sur orbites fermées est celle de mouvement quasi périodique.

* L'existence de solutions pour des temps arbitrairement grands est assurée pour des variétés compactes.

Définition : $x(t)$ est une fonction quasi périodique si elle est de la forme décrite à la page 3.

$$x(t) = f(\omega_1 t, \dots, \omega_k t).$$

Définition : L'ensemble Ω des points* récurrents X est défini par : $x \in \Omega \iff$ pour tout voisinage U de x , $U \subset B$ est pour chaque $T > 0$ il existe un $t > T$ tel que $\mathcal{D}_{X,t}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Exemple :  $\Rightarrow \Omega = \{N, S\}$;  $\Rightarrow \Omega =$ toute la surface.

Si $x(t)$ est quasi périodique, on peut s'imaginer que $x(t)$ se déplace sur un tore τ en B . Il est évident que pour un mouvement quasi périodique (du champ vectoriel $x(t)$!!, non pas des "gouttes" du liquide) $\Omega = \tau$.

Le théorème suivant montre que $\Omega = \tau$ est une situation exceptionnelle, c'est-à-dire non-générique. Nous le donnons sous une forme restreinte :

Théorème (Peixoto [5], voir [4]).

L'ensemble des champs vectoriels X sur le tore à deux dimensions dont les points récurrents consistent en un nombre fini de points fixes et d'orbites fermées est dense dans l'ensemble des champs vectoriels sur le tore.**

Donc l'ensemble des X pour lesquels $\Omega = \tau$ est non-dense, donc non-générique.

Existence d'attracteurs étranges.

Dans la section précédente, nous avons vu que les orbites quasi périodiques sont une "spécialité" non-générique (au moins sur le tore à deux dimensions). A notre recherche de turbulence nous nous sommes plutôt intéressés à des comportements étranges génériques.

Nous donnerons dans cette section l'exemple d'un attracteur étrange dans le cas $\nu = 4$. La construction de cet exemple nécessite quelques définitions.

Définition : Soit A un sous-ensemble fermé de l'ensemble Ω des points récurrents. Alors A est un *attracteur* s'il existe un voisinage U de A tel que $\bigcap_{t>0} \mathcal{D}_{X,t}(U) = A$.

Exemple : Un point attracteur est dessiné comme



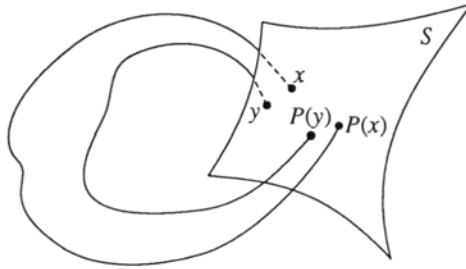
(Cf. aussi discussion dans la section a suivre.)

* N.B. Dans nos applications, les "points" sont des champs de vitesses !

** "X sur le tore" veut dire que $\partial_t x(t) = X(x)$ se déplace sur le tore $\subset B$.

Les attracteurs possibles les plus simples sont des points fixes et des orbites fermées.

Supposons que les courbes intégrales du champ X donné sont plus ou moins parallèles, de telle façon qu'on peut les couper transversalement avec un morceau de variété S à $\nu - 1$ dimensions.



Soit $P(x)$ la première intersection de $x(t)$, $t > 0$ avec S . P est appelée l'application de Poincaré.

Propriété : P est un difféomorphisme local. Notez aussi que pour

$$P^n(x) = P(P^{n-1}(x)) ; P^1(x) = P(x) ;$$

alors $P^n(\zeta) = \zeta$ signifie que ζ se trouve sur une orbite fermée.

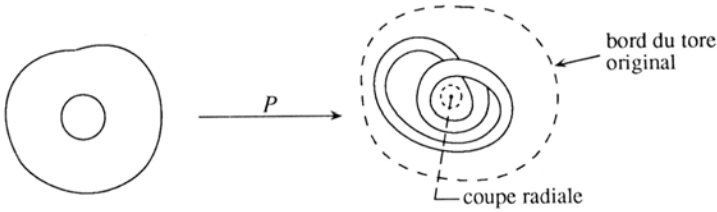
Remarque : La construction inverse est possible (suspension).

Si S est donné, on considère l'ensemble $S \times I$, I l'intervalle $[0, 1]$. On considère sur cet ensemble le champ de vecteur constant $(0, 1)$, et puis on identifie $(x, 1)$ avec $(P(x), 0)$. On voit que la section de la variété obtenue par $S \times \{0\}$ donne une application de Poincaré qui n'est autre que P . Cette construction s'appelle suspension.

Fin de la remarque

Nous sommes alors préparés à donner l'exemple d'un attracteur bizarre. L'exemple est construit dans $\nu = 4$ dimensions, et S est un morceau de variété à 3 dimensions contenant un tore solide Π .

Supposons que P applique le tore en soi-même selon le dessin suivant.



Donc l'image de P entoure l'axe du tore 2 fois.

Exercice : Visualiser P^2 à l'aide d'un ruban élastique.

L'ensemble $S' = \bigcap_{n>0} P^n \Pi$ définit un attracteur au sens suivant. On considère la suspension de S' et un champ X correspondant. Par définition la suspension de P est un attracteur de X .

L'aspect bizarre de S' est qu'il est localement le produit de l'ensemble de Cantor et d'un segment.

Nous donnons quelques définitions et explications par rapport à cet énoncé.

S' aura précisément la forme de l'exemple d'ensemble de Cantor bien connu :

Exemple : Soit donné l'intervalle $[0, 1]$. On enlève de I le tiers ouvert au milieu

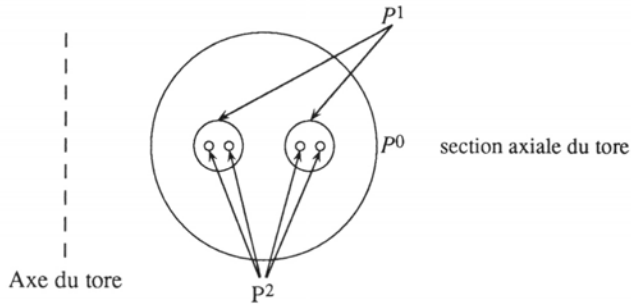
$$I_1 = I \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right). \quad \text{---} \quad \text{---} = I_1$$

On répète ce procédé pour les parties de I

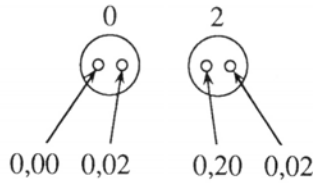
$$\begin{aligned} I_1 &= \text{---} \quad \text{---} \\ I_2 &= \text{---} \text{---} \quad \text{---} \text{---} \end{aligned}$$

et ainsi de suite. La limite des I_n est un exemple d'un ensemble de Cantor. Il correspond aux fractions écrites en base 3, ne contenant pas le chiffre 1. Donc $0,20220 \dots$ est dans l'ensemble en question. A chaque tel nombre on peut associer un point de la coupe radiale

des images de tores (cf. dessin page 9).



Les points seront numérotés comme suit :



et comme on a une "répétition" infinie de P on obtient évidemment l'ensemble de Cantor décrit en haut.

Il est important de noter que l'attracteur décrit ci-dessus est *stable* pour les petits changements du champ X . C'est à-dire qu'il conserve sa propriété d'ensemble de Cantor pour des petits changements de X . L'existence d'un tel attracteur "étrange" n'est donc pas une pathologie non-générique : En effet, nous avons vu qu'il existe un voisinage de champs du champ X ayant la même propriété que X .

2. Les résultats.

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les notions acquises au paragraphe précédent pour formuler les divers résultats. Les résultats seront énoncés d'une façon plus ou moins légère afin de ne pas trop embrouiller leur signification. Les énoncés précis d'une partie de ces résultats seront donnés plus tard et parfois complétés de preuves.

Nous essayons de suivre qualitativement le développement de X quand μ croît et nous tenterons d'exhiber la suite des phénomènes physiques décrits dans l'introduction.

Soit X_μ un champ vectoriel dépendant du paramètre μ . Nous supposons X_μ r fois différentiable en μ et en plus nous utilisons les conventions introduites dans les sections

précédentes.

Nous considérons maintenant X_μ comme la partie droite de l'équation de Navier-Stokes.

a) Le système au repos.

Pour $\mu = 0$, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = X_\mu(x)$$

a la solution $x = 0$; ceci est l'hypothèse que le système sans forces se trouve au repos. Pour discuter les changements du système près de $\mu = 0$, nous considérons les valeurs propres de la matrice de Jacobi A_k^j

$$A_k^j = \frac{\partial X_0^j}{\partial x^k}(0).$$

L'hypothèse que le système est stable au repos $x = 0$ est traduite au fait que $x = 0$ est un point attractif. Nous supposons donc que toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles (strictement) négatives.

Le fait que les valeurs propres avec partie réelle strictement négative font du point $x = 0$ un point attractif se voit facilement en regardant l'équation différentielle pour la composante correspondant à la valeur propre λ . On a

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad x = x_0 e^{\lambda t} = x(x_0, t)$$

et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0, t) = 0$.

Le dessin pour une valeur λ , réelle est $\longrightarrow \bullet \longleftarrow$.

Remarques :

- A_k^j est une matrice réelle, en général non symétrique.
- A_k^j est une linéarisation de X_μ au point $\mu = 0$.

Les valeurs propres de A_k^j sont ou bien réelles ou bien en paires complexes conjuguées.

"Presque toutes" les matrices A_k^j peuvent être transformées en la forme suivante (tous

les éléments réels) :

$$\left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_e & \\ & & & 0 \\ & & \boxed{\begin{array}{cc} \kappa_1 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & \kappa_1 \end{array}} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{\begin{array}{cc} \kappa_{e'} & \varphi_{e'} \\ -\varphi_{e'} & \kappa_{e'} \end{array}} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_e \\ \kappa_1 < \dots < \kappa_{e'} \end{array}$$

“Presque toutes” les matrices veut dire que par un petit changement des éléments on trouve une matrice qui peut être transformée en la forme notée ci-dessus. (Un problème se pose en effet seulement pour les matrices qui ont des valeurs propres coïncidentes.)

Notre discussion va se dérouler de la façon suivante : Les changements de μ vont causer des changements de la matrice Jacobienne A_j^i du point fixe correspondant à μ . Les changements les plus importants seront ceux qui feront apparaître par exemple de nouveaux attracteurs. Ces changements sont étroitement liés aux parties réelles des valeurs propres de A_j^i .

b) Le cas stationnaire.

Sous a) nous avons postulé que A_j^i n'a que des valeurs propres de partie réelle négative (stabilité du système). Par conséquent, $\text{Det}(A_k^j) \neq 0$, et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et on obtient le résultat :

Il existe un $\tilde{\mu} > 0$ tel que pour tout $\mu < \tilde{\mu}$ l'équation $X_\mu(\zeta(\mu)) = 0$ a une solution unique $\zeta(\mu)$. $\zeta(\mu)$ dépend de manière continue de μ .

Naturellement $\zeta(0) = x_0$. Le théorème dit qu'il existe toujours un point fixe pour des μ petits. Nous suivons $\zeta(\mu)$ lorsque μ croît, en définissant

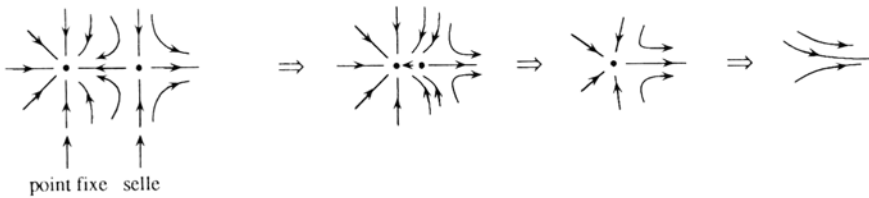
$$A_k^j(\mu) = \frac{\partial X_\mu^j}{\partial X^k}(\zeta(\mu)). \quad (2)$$

Par continuité, les valeurs propres de $A_k^j(\mu)$ sont peu différentes de celles de $A_k^j = A_k^j(0)$. En particulier, si elles avaient des parties réelles négatives $< -\varepsilon < 0$, elles auraient cette même propriété (avec un ε') si $\mu < \mu_1$, pour un certain μ_1 . C'est-à-dire que pour $\mu < \mu_1 (< \tilde{\mu})$ le système a un point fixe attractif; en termes physiques, le système se trouve dans un état stationnaire stable. Cette situation va être typique jusqu'à ce que $\mu \rightarrow \mu_1$.

c) Développement d'une solution périodique (Bifurcation de Hopf).

Nous considérons maintenant le système dans un état stationnaire ($\mu < \mu_1$) lorsque μ devient plus grand que μ_1 en termes de valeurs propres : Les valeurs propres peuvent prendre la valeur nulle ou des valeurs positives. Aussi, une paire de valeurs propres complexes conjuguées peut croiser l'axe imaginaire. Nous allons décrire qualitativement ce qui se passe en ce cas. (Le cas de deux valeurs propres qui se confondent est non-générique.)

Cas d'une valeur propre réelle : Le point fixe disparaît génériquement dans un point selle. Voir le "film" :



Ce cas ne nous intéressera pas particulièrement.

Regardons maintenant une paire de valeurs propres complexes, d'abord avec partie réelle négative ; soit (x_1, x_2) le sous-espace des vecteurs propres.

Soit $\lambda = \kappa \pm i\varphi$, c'est-à-dire que la matrice 2×2 correspondante est

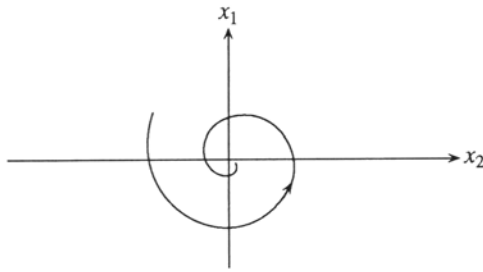
$$\begin{pmatrix} \kappa & \varphi \\ -\varphi & \kappa \end{pmatrix}$$

et l'équation correspondante est

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \varphi \\ -\varphi & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{dont la solution est}$$

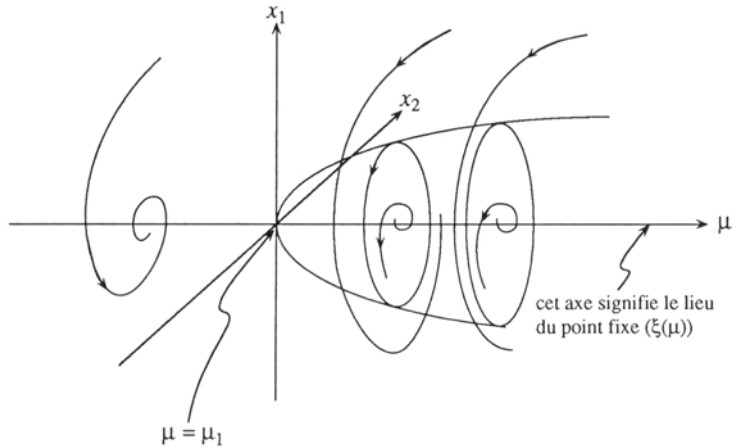
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (x_0, t) = e^{\kappa t} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi t & \sin \varphi t \\ -\sin \varphi t & \cos \varphi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

donc $x = 0$ est de nouveau un point attractif et (x_1, x_2) s'approche en une spirale logarithmique.

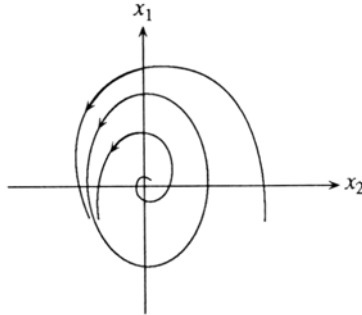


Si maintenant les deux valeurs propres traversent l'axe imaginaire il se produit la bifurcation de E. Hopf [7], dans le sous-espace de ces deux valeurs propres. Il est un théorème profond (Théorème de la variété centrale : voir §3) qu'il ne se passe essentiellement rien dans l'espace orthogonal au sous-espace correspondant aux deux valeurs propres en question. Ce beau théorème permet donc de travailler dans le sous-espace des deux valeurs propres qui croisent l'axe imaginaire sans regarder le "reste" de l'espace.

Soit μ_1 la valeur de μ pour laquelle les valeurs propres croisent l'axe imaginaire. Nous dessinons le "film" du plan x_1, x_2 en fonction de μ .

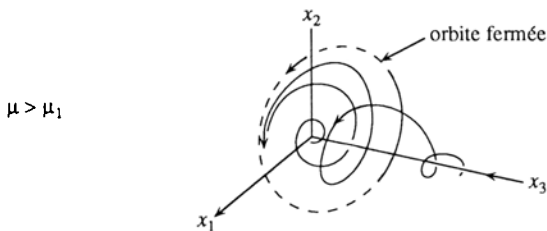
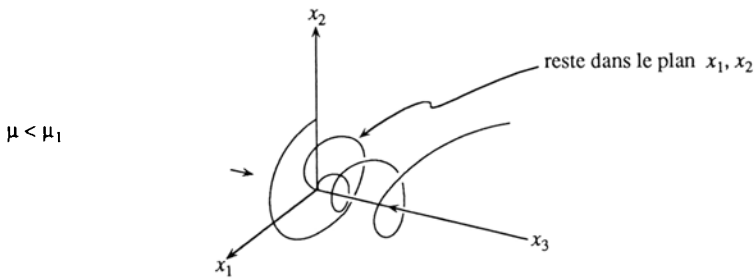


Donc : Pour $\mu < \mu_1$ le point fixe est attractif. Pour $\mu > \mu_1$ il se produit une famille d'orbites fermées (dépendant de μ) avec un point fixe à l'intérieur. L'orbite est attractive et on a des spirales à l'extérieur et à l'intérieur de l'orbite qui sont attirées. Dessinons le plan x_1, x_2 pour un $\mu > \mu_1$



Remarques :

- Le théorème sera discuté dans le §4.
- En principe, il peut se produire une bifurcation de Hopf "inverse" où l'on a une famille d'orbites fermées pour $\mu < \mu_1$. On aurait donc un point répulsif pour $\mu > \mu_1$. Ce cas ne nous intéresse pas puisqu'il ne correspond pas aux hypothèses que nous avons faites pour $\mu = 0$.
- Si l'on plonge le plan x_1, x_2 de nouveau dans le reste de l'espace, le point $\zeta(\mu)$ devient un point selle pour $\mu > \mu_1$. Exemple : En 3 dimensions



Fin de l'exemple

Toute l'analyse de la bifurcation de Hopf montre que pour $\mu > \mu_1$ il se produit un état attractif qui n'est pas un point fixe. Le système est alors en un mouvement périodique stable.

d) Stabilité avant la deuxième bifurcation.

Nous verrons dans e) qu'il peut se produire une deuxième bifurcation (dans l'application de Poincaré) pour $\mu = \mu' > \mu_1$.

Ici, nous nous intéressons pour l'intervalle $\mu \in (\mu_1, \mu')$. Le résultat est que l'orbite attractive reste stable ; mais elle perd un peu son caractère attractif. Cela veut dire que les "spirales" s'approchent moins vite de l'orbite fermée lorsque μ croît. La stabilité de l'orbite fermée sera discutée dans f) dans un contexte un peu plus général (stabilité pour des mouvements sur les tores T^k , dont l'orbite fermée est le cas particulier $k = 1$).

e) Deuxième bifurcation.

Ici, l'orbite fermée, qui apparaissait à cause de la bifurcation de Hopf, va se "gonfler" en un tore de dimension deux.

Soit $\gamma_\mu (\mu \geq \mu_1)$ l'orbite fermée apparaissant dans la bifurcation de Hopf. Soit μ' la valeur de μ pour laquelle se produit la deuxième bifurcation. Cette valeur n'est pas nécessairement égale à μ_2 (la valeur de μ pour laquelle la deuxième paire de valeurs propres croise l'axe imaginaire). Nous supposons que $\lim_{\mu \rightarrow \mu'} \gamma_\mu = \gamma_{\mu'}$, où $\gamma_{\mu'}$ est une orbite fermée de période finie. Il y a, naturellement, d'autres possibilités pour $\lim_{\mu \rightarrow \mu'}$, que nous devons exclure parce qu'elles sont très mal comprises, sauf la première. Les possibilités sont :

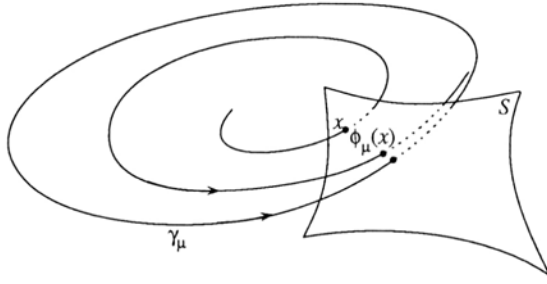
- γ_μ tend vers un point (c'est une bifurcation de Hopf "inverse").
- γ_μ devient non-compact (p. ex. une ligne droite séparant le plan).
- γ_μ reste une courbe fermée compacte, mais sa période tend vers l'infini.

La première possibilité notée ci-dessus et probablement non intéressante (continuer comme pour $\mu < \mu_1$). Les deux autres peuvent causer de la turbulence ou non.

Revenons donc au cas où $\gamma_{\mu'}$ est une orbite fermée, de période finie :

Soit ϕ_μ l'application de Poincaré associée à une pièce de l'hypersurface S qui est

transversale à γ_μ , pour $\mu \in (\mu_1, \mu']$.



Il est utile de regarder la dérivée $d\phi_\mu(p_\mu)$ de ϕ_μ en $p_\mu \equiv S \cap \gamma_\mu$. C'est une application linéaire du plan tangent à S en p_μ en lui-même.

Notez que si un difféomorphisme ϕ est l'intégrale d'un champ vectoriel X , c'est-à-dire que $\phi = \mathcal{D}_{X,t}$ et que X s'annule en p , alors la dérivée de ϕ en p est donnée par $(d\phi)_p = \exp A(p) \cdot t$ où $A(p)$ est la matrice Jacobienne de X en p . Cependant, il existe des difféomorphismes ϕ qui ne sont pas de la forme $\mathcal{D}_{X,t}$.

Comme γ_μ est attractive, $p_\mu (= S \cap \gamma_\mu)$ est un point fixe attractif de ϕ_μ , pour $\mu < \mu'$. Le spectre de $d\phi_\mu$ se trouve à l'intérieur du cercle unité. Pour $\mu = \mu'$ nous supposons l'image suivante. Un nombre fini de valeurs propres se trouve sur le cercle unité, et elles sont isolées du reste du spectre, qui se trouve dans le cercle ouvert $\{z \mid |z| < 1\}$. A cause du théorème de la variété centrale, nous supposons que S est de dimension finie. Sous toutes ces hypothèses on peut dire assez précisément quelles bifurcations se produisent génériquement.

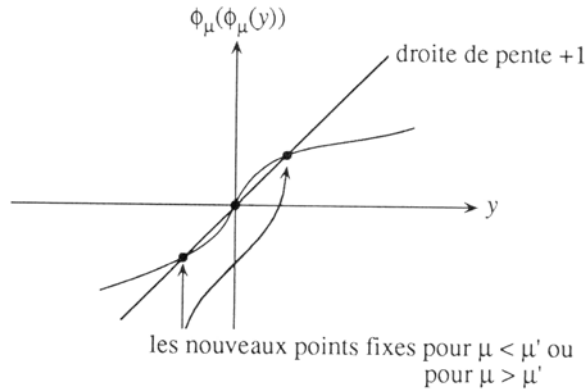
Génériquement, l'ensemble E des valeurs propres de $d\phi_{\mu'}(p_{\mu'})$, de valeur absolue 1, sera d'un des trois types suivants :

1. $E = \{+1\}$
2. $E = \{-1\}$
3. $E = \{\alpha, \bar{\alpha}\} \quad |\alpha| = 1 \quad \alpha \neq \bar{\alpha}$.

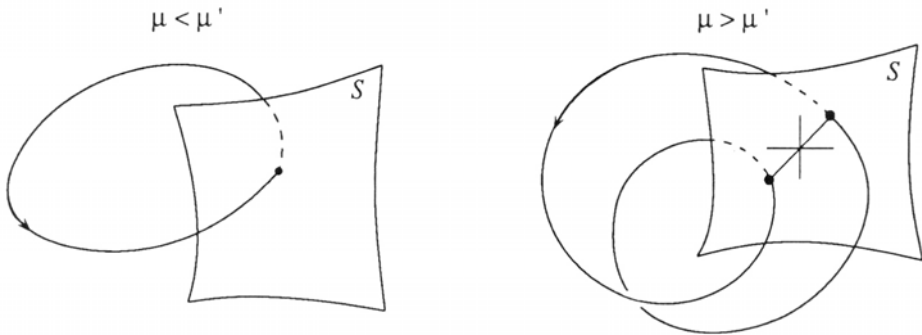
La discussion des cas 1 et 2 se trouve dans l'article de P. Brunovsky [8]. Le cas 1 ne nous intéresse pas tellement puisque γ_μ disparaît en se confondant avec une orbite fermée hyperbolique (similaire au cas d'une valeur propre réelle traversant l'axe imaginaire). Dans le cas 2, il se forme (pour $\mu > \mu'$) une orbite fermée proche de $\gamma_{\mu'}$, mais sa période est doublée.

Ceci se voit comme suit : En une dimension, pour $\mu = \mu'$, $\phi_\mu(y)$ est de la forme $\phi_{\mu'}(y) = -y + by^2 + \dots$, à cause de l'hypothèse sur la valeur propre. On en déduit que $\phi_{\mu'}(\phi_{\mu'}(y)) = y + O(y^3)$, et on trouve, en variant $\phi_\mu(y) = -(1 \pm \varepsilon)y + by^2 \dots$, que

l'application $\phi_\mu(\phi_\mu(y))$ a deux points fixes proche de $y = 0$ soit pour $\mu < \mu'$ soit pour $\mu > \mu'$.

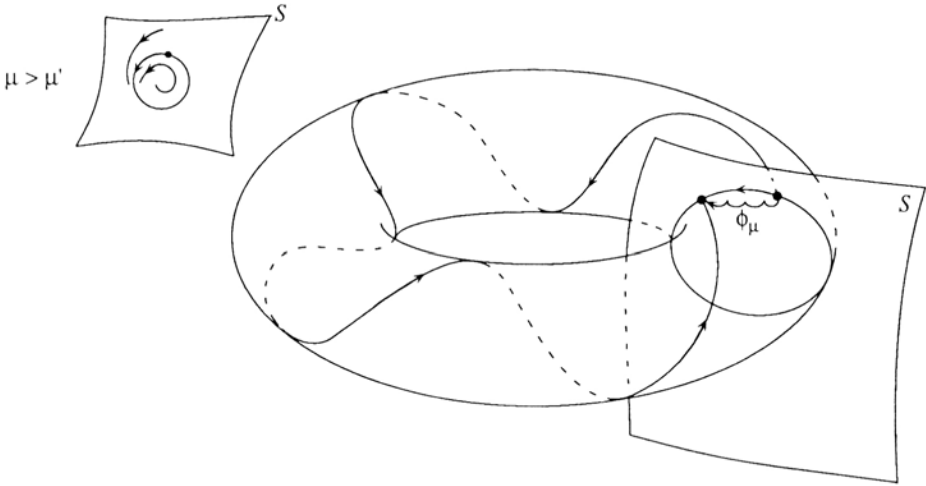


Nous pouvons exclure le premier cas à cause de nos hypothèses physiques. Il suit donc que $\phi_\mu(\phi_\mu(y))$ a deux points fixes et que $\phi_\mu(y)$ a un point périodique "d'ordre 2". La suspension de ces points est une orbite fermée qui coupe S deux fois pour revenir au point de départ : c'est ceci que nous appelons une "période double".



Nous arrivons à la discussion du cas 3. Sous la condition que $\gamma_{\mu'}$ est un attracteur "vague" (notion que nous allons préciser dans les démonstrations), on peut appliquer essentiellement la bifurcation de Hopf pour l'application ϕ_μ (et non pas pour X_μ , cette

fois !). Il y aura, pour $\mu > \mu'$ une orbite fermée attractive de ϕ_μ .



C'est ainsi que l'orbite fermée γ_μ se transforme en un petit tore T^2 , avec une bifurcation de Hopf dans S .

f) Stabilité de quelques champs dans des situations plus compliquées. (Le cas presque factorisé.)

Remarquons d'abord que la situation devient beaucoup plus compliquée après la deuxième bifurcation et qu'il est très difficile (ou même impossible) de traiter plus ou moins tous les cas possibles comme on l'a fait jusqu'à présent. Par exemple, il n'est pas dit que la troisième bifurcation doit produire un tore T^3 , parce qu'il est possible qu'une courbe sur T^2 se "gonfle". Nous sommes donc forcés de traiter des cas assez particuliers tout en laissant ouvert la question si les solutions non accessibles décrivent une turbulence ou non. Le cas que nous pouvons encore discuter est celui où le champ X_μ est "presque factorisé" (nearly split). Nous utilisons la notation suivante :

Nous supposons que A_k^j n'a que des paires de valeurs propres complexes conjuguées. Soit $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots$ la valeur de μ pour laquelle la i -ème paire de v.p. croise l'axe imaginaire. Soient E_1, E_2, \dots les espaces à deux dimensions correspondant à ces valeurs propres.

Nous dirons que \tilde{X}_μ est factorisé s'il est de la forme

$$\tilde{X}_\mu(x) = \tilde{X}_\mu^1(x_1) + \tilde{X}_\mu^2(x_2) + \dots + \tilde{X}_\mu^i(x_i) + \dots$$

Ici, \tilde{X}^i est la composante de \tilde{X} dans E_i et x_i est la composante de x dans E_i . Donc \tilde{X}^i ne dépend que du sous-espace en lequel il applique. Un champ qui est la somme d'un champ factorisé et d'une "petite" perturbation est dit presque factorisé. ("Petit" au sens que les résultats pour un champ factorisé sont valables pour un champ presque factorisé). Les champs presque factorisés sont au moins pas non-génériques.

Considérons \tilde{X}_μ pour $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$: \tilde{X}_μ laisse alors invariant le produit de k orbites fermées attractives, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. En effet, dans chacun des plans $E_1 \dots E_k$ on a eu une bifurcation de Hopf. Dans l'espace total il y a donc un tore invariant attractif de dimension k , \tilde{T}^k . Nous choisissons les coordonnées de \tilde{T}^k de telle façon que le mouvement sur k devient uniforme : $\theta_i(t) = \theta_{i_0} + \omega_i t \pmod{2\pi}$ $i = 1, \dots, k$. (N.B. La fréquence ω_i ne dépend pas du système de coordonnées.)

En général, le mouvement sur \tilde{T}^k va être quasi périodique, (peut-être avec un nombre de ω_i rationnellement indépendant qui est plus petit que k). Une telle situation n'est pas générique en deux dimensions (par le théorème de Peixoto) et donc non plus en plusieurs dimensions.

Si maintenant la perturbation $\tilde{X}_\mu \rightarrow X_\mu$ est assez petite il suit de Kelley [9] (Théorèmes 4 et 5) et des travaux récents de Pugh (non publiés) le résultat suivant :

Il existe dans un voisinage de \tilde{T}^k un tore invariant T^k pour X_μ , attractif dans le sens que pour un voisinage U de T^k , $\bigcap_{t>0} \mathcal{D}_{X_\mu, t}(U) = T^k$. (T^k ne consiste pas nécessairement de points récurrents.)

En résumé, pour un champ presque factorisé, le mouvement est compliqué, mais au moins sur un tore "attractif".

(Remarque : Cette analyse est seulement juste pour μ pas trop près de μ_k, μ_{k+1}). La grandeur des perturbations est en relation avec le caractère attractif du tore.

g) Les attracteurs étranges. Proposition d'une définition de turbulence.

Ayant étudié en f) le mouvement dans le cas presque factorisé, nous finissons notre étude des systèmes dissipatifs en regardant les attracteurs qui peuvent se produire dans ce cas.

Si l'on cherche des attracteurs (au sens de la définition de la page 7 (points récurrents)), on doit les chercher sur le tore T^k . Et sur T^k , ceci revient à l'étude de la perturbation d'un mouvement quasi périodique. Considérons alors X_μ sur T^k ($\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$).

Pour $k = 2$, le théorème de Peixoto implique que l'ensemble des points récurrents consiste génériquement en un nombre fini de points fixes et d'orbites fermées. En fait il apparaîtra un nombre fini d'orbites fermées attractives, et le nombre de rotation (c'est le rapport du nombre de tours que fait une orbite fermée suivant les deux cycles fondamentaux du tore) sera un nombre rationnel (génériquement).

Si $k > 2$, l'ensemble des champs vectoriels à un nombre fini de points fixes et d'orbites fermées ne sera plus dense dans l'espace \mathcal{B} . On va donc avoir d'autres mouvements attracteurs (génériques) qui correspondent à un type plus compliqué ; nous les appelons "attracteurs étranges" et nous leur donnons la signification de décrire une turbulence.

Pour $k = 3$ on ne connaît pas de tels mouvements qui sont attractives.* Pour $k = 4$ on a le résultat suivant : Dans la topologie C^{3**} il existe dans chaque voisinage d'un champ quasipériodique \tilde{X} un ouvert de champ avec un attracteur étrange. (Ceci sera démontré plus tard.) Cela veut dire que les attracteurs étranges ne sont pas du tout rares.

Remarque : L'ensemble vide et des orbites non-génériques comme (8) sont exclus de la notion "étrange".

La justification d'associer la turbulence aux attracteurs étranges est fournie par deux observations :

- a) Les attracteurs étranges ont une forte chance d'apparaître lorsque μ est assez grand.
- b) Dans les exemples connus où l'attracteur A est étrange, la structure des courbes intégrales A et dans son voisinage est compliquée et erratique. (Cf. Smale [10], Williams [11]).

Récapitulation et remarques.

Nous allons nous concentrer sur la signification de notre définition de turbulence.

- (1) Le concept de généricité basé sur les ensembles résiduels n'est pas nécessairement correct d'un point de vue physique. En effet, nous avons vu (page 6, premier exemple), que le complément d'un ensemble résiduel ne doit pas avoir nécessairement une mesure de Lebesgue nulle. En particulier il est imaginable que les mouvements quasi périodiques (que nous avons toujours éliminés) occupent en effet une partie de l'axe de μ avec mesure non-nulle. (Par exemple si, sur T^2 , $\omega \equiv \omega_1/\omega_2$ est absolument continu en fonction de μ et non constant, il prend des valeurs irrationnelles sur un ensemble qui n'est pas de mesure nulle).
- (2) Les mouvements périodiques de très longue période pouvaient avoir l'aspect d'un mouvement turbulent.
- (3) Il est difficile de dire quelque chose pour μ au voisinage d'un μ_1 . En général, on a l'impression que les mouvements, qui ne sont pas décrits par notre analyse, sont compliqués et probablement turbulents.
- (4) Le caractère précis des équations décrivant un fluide visqueux a été complètement négligé. Mais on connaît la structure de ces équations et en plus il y a des situations expérimentales bien connues sous lesquelles la turbulence apparaît. Une théorie plus spécialisée devrait décrire ces situations.
- (5) Les mouvements quasi périodiques ne sont pas "turbulents" dans le sens suivant : Si l'on peut obtenir des propriétés statistiques du mouvement à l'aide de théorèmes ergodiques, on peut distinguer entre les mouvements que nous avons classifiés comme turbulents et les mouvements quasi périodiques. En fait, pour une mesure ergodique m sur l'ensemble attractant A , la valeur expectation d'une quantité x_t (fonction sur

* Par contre, l'ensemble des points récurrents peut contenir des parties "étranges" mais non attractives.

** Topologie de la page 5 avec $r = 3$

H (ou B) est $m(x_t) = m(x_0)$; t est le temps. Si m est "mélangeant", la fonction de corrélation $m(x_t y_0) - m(x_t) \cdot m(y_0)$ tend vers zéro pour $t \rightarrow \infty$. Une telle situation semble être typique pour la turbulence et naturellement il y a par contre une corrélation forte pour les systèmes quasi périodiques. C'est en ce sens que nous justifions l'exclusion des systèmes quasi périodiques comme étant turbulents, même s'ils sont très compliqués (cf. Bass [12]).

II. Les théorèmes.

Dans ce deuxième chapitre, nous présentons les théorèmes les plus importants qui ont été utilisés pour la description des systèmes dissipatifs.

3. Réduction à deux dimensions.

Dans cette section, on démontre à l'aide du théorème de la variété centrale [13] qu'il est permis de travailler toujours dans un espace à deux dimensions parce qu'il ne "se passe rien" dans les autres directions.

Définition 1 : Soit H un espace de Hilbert, de dimension finie ou infinie et X un champ de vecteurs sur H , que l'on suppose C^1 ($r = 1$ dans déf. de la page 5). On suppose que X s'annule en $p \in H$, et que $\mathcal{D}_{X,t}$ (l'intégrale au temps t) existe. Le spectre X au point p est défini comme étant le spectre de l'application $L(X)$, qui est donnée par $(d\mathcal{D}_{X,t})_p = \exp(L(X) \cdot t)$. (L correspond à la matrice Jacobienne.)

Proposition 2 : Soit X_μ une famille à un paramètre μ de champs de vecteurs C^k sur un espace de Hilbert H tel que $X(h, \mu)$, défini par $X(h, \mu) = (X_\mu(h), 0)$, sur $H \times \mathbb{R}$ soit C^k lui aussi. Supposons

- (a) $X_\mu = 0$ à l'origine de H .
- (b) Pour $\mu < 0$ le spectre de X_μ à l'origine de H est contenu dans $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) < 0\}$.
- (c) Pour $\mu = 0$, resp. $\mu > 0$, le spectre de X_μ à l'origine a deux valeurs propres $\lambda(\mu)$ et $\bar{\lambda}(\mu)$, isolées, de multiplicité un et satisfaisant $\text{Re}(\lambda(\mu)) = 0$ resp. $\text{Re}(\lambda(\mu)) > 0$. Le reste du spectre se trouve dans $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) < 0\}$.

Il existe alors une (petite) variété C^k à trois dimensions, appelée \tilde{V}^c , dans $H \times \mathbb{R}$ contenant $(0, 0)$ telle que :

- (1) \tilde{V}^c est localement invariant sous $X(h, \mu)$. Localement invariant veut dire qu'il existe un voisinage U de $(0, 0)$ tel que pour tout $|t| \leq 1$ $\tilde{V}^c \cap U = \mathcal{D}_{X,t}(\tilde{V}^c) \cap U$.
- (2) Il existe un voisinage U' de $(0, 0)$ tel que pour tout $p \in U'$ récurrent et satisfaisant $\mathcal{D}_{X,t}(p) \in U'$ on a $p \in \tilde{V}^c$.
- (3) En $(0, 0)$, \tilde{V}^c est tangent à l'axe μ et aux espaces propres de $\lambda(0)$ et $\bar{\lambda}(0)$.

Démonstration. Nous voulons nous ramener à un théorème de Hirsh, Pugh et Shub [13], dont nous utilisons la version spéciale suivante :

Théorème [13] (de la variété centrale) : Soit H un espace de Banach avec norme C^k , de dimension finie ou infinie. Soit X un champ de vecteurs C^k , s'annulant à l'origine de H , L la partie linéaire de X à l'origine de H . Si L a un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicité finie sur l'axe imaginaire, dont V^c est l'espace propre alors il existe une variété C^k , appelée \tilde{V}^c , tangente à V^c à l'origine de H qui est localement invariant par X .

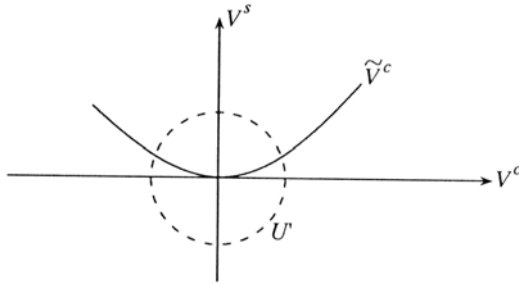
Remarques : La variété dont on affirme l'existence n'est pas unique. Si $k = \infty$, il existe pour chaque $k < \infty$ une telle variété, mais l'intersection de toutes ces variétés peut être réduite à zéro.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème 2. Il faut d'abord déterminer les valeurs propres de X en fonction des valeurs propres de X_μ . Ceci est facile puisque $X(h, \mu) = (X_\mu(h), 0)$, qui implique immédiatement que les valeurs propres de X sont celles de X_μ (à $(0, 0)$) plus la valeur $\{0\}$ (correspondant à la direction μ). Nous décomposons donc l'espace tangent T en $(0, 0)$ de la façon suivante

$$T = V^c \oplus V^s, \quad \text{où } V^c \text{ est tangent à l'axe des } \mu$$

et contient les espaces propres de $\lambda(0)$ et $\overline{\lambda(0)}$. Puisque le reste du spectre doit se trouver dans $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < -\delta\}$ pour un $\delta > 0$ (le spectre est fermé) on peut appliquer le théorème de la variété centrale et ceci démontre 1) et 3) du théorème 2.* Il nous reste à voir 2).

Par le fait que le spectre correspondant à V^s se trouve dans le demi-plan gauche, $d(\mathcal{D}_{X,t})_{(0,0)}$ induit une contraction pour $t > 0$.



Il existe donc un voisinage U' de $(0, 0)$ tel que

$$U' \cap \left[\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathcal{D}_{X,t}(U') \right] \subset (U' \cap \tilde{V}^c).$$

* Remarque : Si X est C^k , \tilde{V}^c est C^k . Mais si X_μ est C^k et X seulement C^1 , alors \tilde{V}^c est C^1 mais pour chaque μ_0 $\tilde{V}^c \cap \{\mu = \mu_0\}$ serait C^k .

Si maintenant $p \in U'$ est récurrent et si en plus $\mathcal{D}_{X,t}(p) \in U'$ pour tous les t , ceci veut dire que pour tout $N > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $t > N$ tel que la distance entre p et $\mathcal{D}_{x,t}(p)$ est plus petite que ε . Donc $p \in (U' \cap \tilde{V}^c) \subset \tilde{V}^c$.

QED

La proposition 2 est valable aussi pour les difféomorphismes.

Définition 3 : Soit $\phi : H \rightarrow H$ une application C^1 avec point fixe $p \in H$, H un espace de Hilbert réel. Le spectre de ϕ en p est le spectre de l'application induite tangente : $(d\phi)_p : T_p(H) \rightarrow T_p(H)$.

Théorème 4 :

Soit ϕ_μ une famille à un paramètre de difféomorphismes C^k sur un espace de Hilbert réel H , tel que $\phi = (\phi_\mu(h), 0)$ sur $H \times \mathbb{R}$ est C^k . Supposons

- (a') l'origine de H est un point fixe de ϕ_μ ;
- (b') pour $\mu < 0$ le spectre de ϕ_μ à l'origine est contenu dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- (c') pour $\mu = 0$, resp. $\mu > 0$, le spectre de ϕ_μ à l'origine a deux valeurs propres $\lambda(\mu)$ et $\overline{\lambda(\mu)}$, isolées, de multiplicité un et $|\lambda(\mu)| = 1$ resp. > 1 . Le reste du spectre se trouve dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Alors les conclusions de la proposition 2 sont vraies pour le difféomorphisme ϕ .

Les théorèmes 2 et 4 nous permettent donc de travailler dès maintenant dans un espace à 3 dimensions (axe des μ inclus).

4. La bifurcation de Hopf.

Comme il a déjà été dit plusieurs fois, il est possible de considérer la bifurcation dans un espace à 2 dimensions, (ou, plus précisément, un ouvert de \mathbb{R}^2 correspondant à une cote de \tilde{V}^c).

Soit donc X_μ une famille à un paramètre de champs de vecteurs C^k sur \mathbb{R}^2 , satisfaisant (a), (b), (c) de la page 22 :

(a) $X_\mu(0, 0) = 0$.

(b) (c) : Soient $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$ les valeurs propres de X_μ en $(0, 0)$

et $\operatorname{Re} \lambda(\mu) < 0$, $\operatorname{Im} \lambda(\mu) > 0$, si $\mu < 0$

$\operatorname{Re} \lambda(\mu) = 0$ (resp. > 0) et $\operatorname{Im} \lambda(\mu) > 0$, si $\mu = 0$ resp. $\mu > 0$.

La motivation physique a été donnée au premier chapitre. Nous demandons en plus que $\lambda(\mu)$ traverse l'axe imaginaire avec une vitesse bornée par en-dessous (en fonction de μ) :

(d) :
$$\left(\frac{d \operatorname{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} \right)_{\mu=0} > 0.$$

En plus, soit X_μ un champ C^k avec $k \geq 5$ (ceci, pour nous permettre les transformations des coordonnées).

Avec tout ceci, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 5 (Hopf [7]) : *Si X_μ est C^k , $k \geq 5$, et satisfait à (a), (b), (c), (d) alors il existe une famille d'orbites fermées de $X = (X_\mu, 0)$ sur $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1$, dans les voisinages de $(0, 0, 0)$, avec une période proche de $2\pi/|\lambda(0)|$. Il existe un voisinage U de $(0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ tel que chaque orbite fermée de X , contenue dans U , appartient à la famille d'orbites mentionnée ci-dessus.*

Si $(0, 0)$ est un "attracteur vague" (qui sera défini dans la démonstration) pour X_0 , la famille d'orbites fermées est contenue dans $\mu > 0$ et est attractive.

Nous nous procurons d'abord un outil pour faire une transformation à des coordonnées polaires. Notez d'abord qu'avec une simple transformation des coordonnées on peut avoir

$$X_\mu = (x_1 \operatorname{Re} \lambda(\mu) + x_2 \operatorname{Im}(\lambda(\mu))) \frac{\partial}{\partial x_1} + \\ + (-x_2 \operatorname{Im} \lambda(\mu) + x_1 \operatorname{Re} \lambda(\mu)) \frac{\partial}{\partial x_2} + O(x^2).$$

Lemme 6 : *Soit X un champ de vecteurs C^k sur \mathbf{R}^2 et soit $X(0, 0) = 0$. Définissons des coordonnées polaires par l'application $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$; $\psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Alors il existe un champ de vecteurs C^{k-2} unique, \tilde{X} , sur \mathbf{R}^2 tel que $\psi_*(\tilde{X}) = X$ (c'est-à-dire, pour tout (r, φ) $d\psi(\tilde{X}(r, \varphi)) = X(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$).*

Démonstration du Lemme 6. On peut écrire ($r^2 = x_1^2 + x_2^2$)

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ = \frac{x_1 X_1 + x_2 X_2}{r} \left(\frac{1}{r} \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \right) + \frac{-x_2 X_1 + x_1 X_2}{r^2} \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \\ = \frac{f_r(x_1, x_2)}{r} \psi_*(\tilde{Z}_r) + \frac{f_\varphi(x_1, x_2)}{r^2} \psi_*(\tilde{Z}_\varphi).$$

Ici, $\tilde{Z}_r (= \frac{\partial}{\partial r})$ et $\tilde{Z}_\varphi (= \frac{\partial}{\partial \varphi})$ sont les "champs vectoriels des coordonnées" par rapport à r et φ . Soit maintenant $\psi^*(f_r) = f_r \psi$ et $\psi^*(f_\varphi) = f_\varphi \psi$. Ils sont zéro sur $\{r = 0\}$, ainsi que leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial r}(\psi^*(f_r))$ et $\frac{\partial}{\partial r}(\psi^*(f_\varphi))$. Par le théorème de division $\frac{\psi^*(f_r)}{r}$ et $\frac{\psi^*(f_\varphi)}{r^2}$ sont alors C^{k-1} et C^{k-2} .

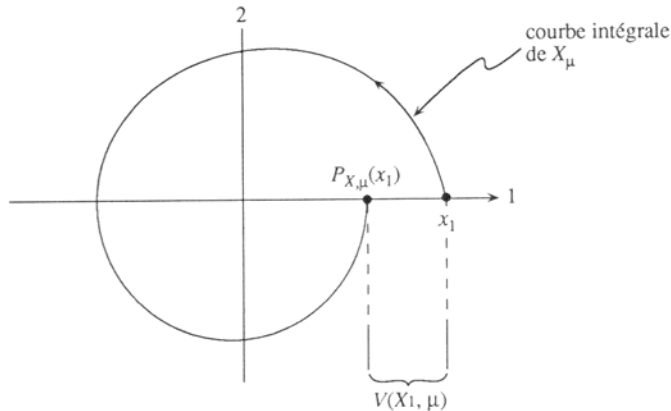
On peut donc poser $\tilde{X} = \frac{\psi^*(f_r)}{r} \tilde{Z}_r + \frac{\psi^*(f_\varphi)}{r^2} \tilde{Z}_\varphi$, dont l'unicité est évidente.

Nous revenons maintenant à la démonstration du théorème 5 : L'idée est de regarder l'application de Poincaré sur l'axe x_1 (associée au champ X).

Définition 7 : Soit X comme au théorème 5. Nous définissons P_X comme l'application de

$$\{(x_1, x_2, \mu) \mid |x_1| < \varepsilon, x_2 = 0, |\mu| \leq \mu_0\}$$

dans le plan (x_1, μ) . μ_0 est choisi de façon que $\text{Im } \lambda(\mu) \neq 0$ pour $|\mu| \leq \mu_0$; ε est suffisamment petit en vue des non-linéarités de X . P_X applique (x_1, x_2, μ) dans le premier point d'intersection de $\mathcal{D}_{X,t}(x_1, x_2, \mu)$ ($t > 0$) avec le plan (x_1, μ) , pour laquelle les signes de x_1 et de la coordonnée x_1 de $\mathcal{D}_{X,t}(x_1, x_2, \mu)$ sont égaux (c'est-à-dire un tour complet). Remarquons que $P_X(x_1, \mu) = (P_{X,\mu}(x_1), \mu)$. On peut donc dessiner P_X dans un plan $\mu = \text{const}$.



On voit donc que $\text{Im } \lambda(\mu) \neq 0$ est demandé pour assurer que la courbe intégrale "tourne".

Il suit du Lemme 6 que P_X est C^{k-2} .

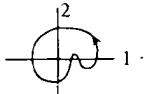
Nous avons déjà indiqué dans la figure la signification de la fonction de déplacement V . Elle est définie comme suit :

$$P_{X_1}(x_1, 0, \mu) = (x_1 + V(x_1, \mu), 0, \mu)$$

(ou $V(x_1, \mu) = P_{X,\mu}(x_1) - x_1$).

Cette fonction V sera très utile pour la discussion de la bifurcation. Donnons-en quelques propriétés. (On appellera r la variable radiale x_1).

- (i) $V(0, \mu) = 0$, par hypothèse sur X_μ . Les autres zéros de V apparaissent en paires de signes opposés ; chaque paire correspondant à une orbite fermée. Ceci est assuré par le choix de ε (cf. déf. 7) qui assure que les termes non-linéaires de X ne perturbent pas trop l'image des orbites fermées. Par exemple, pour $|x_1| < \varepsilon$ on ne doit pas avoir



- (ii) Au premier ordre, on peut calculer $V(r, \mu)$ comme suit :

$$X_\mu = \text{Im } \lambda(\mu) \frac{\partial}{\partial \varphi} + r \text{Re } \lambda(\mu) \frac{\partial}{\partial r} + O(r^2).$$

La "pente" dans le plan (r, φ) de X_μ est donc $r \operatorname{Re} \lambda(\mu) / \operatorname{Im} \lambda(\mu)$ et ainsi

$$V(r, \mu) = \int_0^{2\pi} d\varphi r \frac{\operatorname{Re} \lambda(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda(\mu)} + O(r^2) = \frac{2\pi r \operatorname{Re} \lambda(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda(\mu)} + O(r^2).$$

Il suit immédiatement que

$$\frac{\partial V}{\partial r}(0, \mu) = 2\pi \frac{\operatorname{Re} \lambda(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda(\mu)}$$

et aussi que

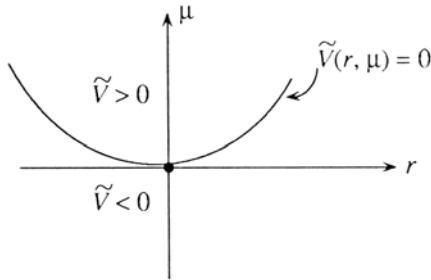
$$\frac{\partial V}{\partial r \partial \mu}(0, 0) = 2\pi \frac{\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\mu}(0)}{\operatorname{Im} \lambda(0)} - 2\pi \frac{\operatorname{Re} \lambda(0) \operatorname{Im} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}(0)}{[\operatorname{Im} \lambda(0)]^2}.$$

Le deuxième terme à droite est nul à cause des hypothèses (c) sur $\lambda(\mu)$: $\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$, $\operatorname{Im} \lambda(0) > 0$. Par ces mêmes hypothèses on trouve que

$$\frac{\partial V}{\partial r \partial \mu}(0, 0) > 0 \text{ parce que sous (d) on avait demandé } \left(\frac{d \operatorname{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} \right)_{\mu=0} > 0.$$

Il est utile d'introduire une fonction $\tilde{V}(r, \mu) := V(r, \mu)/r$, qui est, par le théorème de division une fonction C^{k-3} . On a alors $\tilde{V}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0, 0) > 0$.

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on trouve qu'il existe (au voisinage de $(0, 0)$) une courbe ℓ unique C^{k-3} de zéros de \tilde{V} , passant par $(0, 0)$.



Il suit que l'ensemble des zéros de V est l'union de ℓ et de $\{r = 0\}$. La courbe ℓ induit la famille à un paramètre d'orbites fermées.

(iii) Définissons $(0, 0)$ comme *attracteur vague* pour X_0 si

$$V(r, 0) = -Ar^3 + \text{ordre sup à 3} \quad \text{et} \quad A > 0.$$

Nous considérons maintenant le cas de l'attracteur vague : En ce cas, \tilde{V} prend la forme

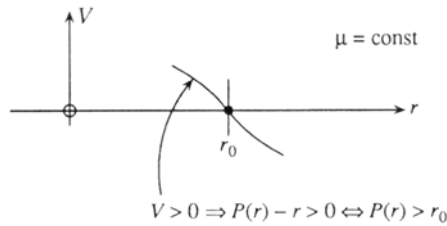
$$\tilde{V} = \alpha_1 \mu - Ar^2 + \text{termes d'ordre supérieur en } \mu \text{ et } r.$$

Nous avons vu que $\alpha_1 > 0$ (parce que $\frac{\partial V}{\partial r \partial \mu}(0,0) > 0$) ; il s'en suit que $\tilde{V} = 0 \Leftrightarrow \mu \simeq \frac{A}{\alpha} r^2$, donc les zéros de \tilde{V} se trouvent dans le demi-plan $\mu > 0$.

La *période* de l'orbite fermée se trouve aisément à l'aide de la première formule sous (ii).

- (iv) Discussion du caractère attractif des orbites fermées : Considérons le voisinage de $(0,0,0)$ dans lequel $\frac{\partial V}{\partial r} > -1$ (rappel : $\frac{\partial V}{\partial r}(0,\mu) = 2\pi \frac{\operatorname{Re} \lambda(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda(\mu)} > 0$ si $\mu > 0$).

Notez que $V(r,\mu) = 0$ et $(\frac{\partial V}{\partial r})(r,\mu) < 0$ implique que l'orbite fermée correspondant à (r,μ) est attractive, puisque V a le bon signe sur les deux côtés de r_0 .



Si X_0 est un attracteur vague, pour $\mu > 0$, \tilde{V} prend la forme

(c.f. aussi figure de la page précédente).

Il suit que V prend la forme



Nous pouvons donc appliquer les premières remarques de (iv), et on trouve que les orbites fermées sont en effet attractives.

Il nous reste à démontrer que, pour un voisinage U de $(0,0)$, toutes les orbites fermées de X qui sont contenues dans U sont des membres de la famille d'orbites fermées.

On choisit U assez petit pour que

- toute orbite fermée γ de X contenue dans U intersecte le domaine D_P de P_X .

$$- P_X(U \cap D_P) \subset D_P.$$

L'affirmation que toutes les orbites fermées de X contenues dans U sont des membres de la famille d'orbites fermées suit alors immédiatement du caractère attractif de cette famille.

5. Bifurcation de Hopf pour des difféomorphismes

Nous considérons à présent une famille de difféomorphismes $\phi_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaisant (a'), (b'), (c') et

$$(d)'' : \frac{d}{d\mu} (|\lambda(\mu)|)_{\mu=0} > 0.$$

Nous allons transformer ϕ_μ en une forme plus simple par des changements de coordonnées. D'abord, on fait un changement de l'axe des μ de sorte que (d)'' se transforme en

$$(d') \quad |\lambda(\mu)| = 1 + \mu.$$

Une deuxième transformation, dépendante de μ , va mettre ϕ_μ sous la forme

$$\phi(r, \varphi, \mu) = ((1 + \mu)r, \varphi + f(\mu), \mu) + \text{termes d'ordre } r^2$$

où $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. (En fait nous avons simplement décrit la partie linéaire de ϕ en coordonnées polaires.)

La transformation qui va suivre est plus compliquée que les précédentes, et exige en plus la condition (génériquement satisfaite)

$$(e) \quad f(0) \neq 2\pi k/\ell \quad \text{pour tout } k, \ell \leq 5.$$

En ce cas on peut transformer ϕ en une forme "simplifiée" :

$$\phi_\mu(r, \varphi) = ((1 + \mu)r - f_1(\mu)r^3, \varphi + f_2(\mu) + f_3(\mu)r^2) + \text{termes d'ordre } r^5.$$

Dans ces coordonnées ϕ_μ est C^k , mais $\phi = (\phi_\mu, \mu)$ est C^{k-4} .

On va démontrer l'existence de cette transformation au paragraphe suivant.

Soit

$$N\phi_\mu(r, \varphi) = ((1 + \mu)r - f_1(\mu)r^3, \varphi + f_2(\mu) + f_3(\mu)r^2).$$

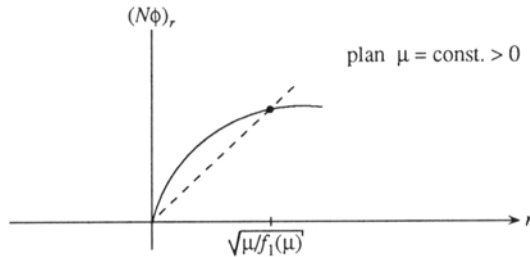
Nous supposons en plus de ce qui a déjà été posé :

$$(f) \quad f_1(0) > 0.$$

Ceci correspond au cas de l'attracteur vague. On a alors le

Théorème 8 : *Soit ϕ au moins C^5 , et supposons que ϕ satisfait à (a'), (b'), (c'), (d') et (e), et que $N\phi$ satisfait à (f). Il existe alors une famille de cercles attractifs invariants de ϕ_μ , un et un seul pour chaque μ en $0 < \mu < \varepsilon$, pour un ε convenablement choisi > 0 .*

Démonstration : L'idée en est la suivante : L'ensemble Σ , $\Sigma = \{\mu = f_1(\mu)r^2\}$ dans l'espace (r, φ, μ) est invariant sous $N\phi$. Σ est en effet attractif pour $N\phi$, parce que $[N\phi_\mu(r)]_r = r + r(\mu - f_1(\mu)r^2)$ qui est plus grand que r , pour $r < \sqrt{\mu/f_1(\mu)}$.

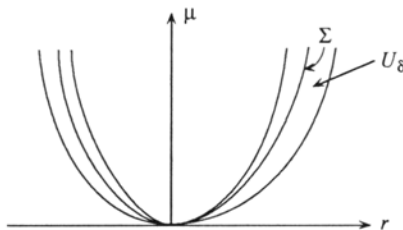


Nous voulons alors montrer que $\{\phi^n(\Sigma)\}_{n=0}^\infty$ est une suite de variétés qui converge, pour μ assez petit, vers une variété invariante. (Notez que Σ est un cercle dans chaque plan $\mu = \text{const.}$)

Pour démontrer la convergence de la suite $\{\phi^n \Sigma\}$, nous considérons l'ensemble

$$U_\delta = \left\{ (r, \varphi, \mu) \mid r \neq 0 \text{ et } \frac{\mu}{r^2} \in [f_1(\mu) - \delta, f_1(\mu) + \delta] \right\}$$

avec $\delta \ll f_1(\mu)$. Dans un plan $\varphi = \text{const.}$, U_δ et Σ ont l'aspect suivant :



(1) $N\phi(U_\delta) \subset U_\delta$.

Ceci est évident. Soit p par exemple sur le bord de U_δ , p_r la composante radiale de p : par exemple $p_r = \mu^{1/2}/(f_1(\mu) - \delta)^{1/2}$. Alors par définition de $N\phi$,

$$\begin{aligned} N\phi(p)_r &= p_r \cdot ((1 + \mu) - f_1(\mu) \cdot p_r^2) \\ &= p_r + p_r^3(f_1(\mu) - \delta) - f_1(\mu)p_r^3 \\ &= p_r - \delta p_r^3. \end{aligned}$$

Donc dans ce cas $N\phi(p)_r$ est plus proche de Σ que p_r . Les autres cas sont similaires.

(2) Le point à noter ensuite, est que ϕ_μ a la même propriété que $N\phi_\mu$ si μ est assez petit. En effet $(\phi_\mu)_r \leq (N\phi_\mu)_r + Cp_r^5$ avec une constante finie C . Alors, si par exemple $p_r = \mu^{1/2}/(f_1(\mu) + \delta)^{1/2}$

$$(\phi_\mu)_r(p) \leq p_r + \delta p_r^3 + Cp_r^5$$

et ceci est plus grand que p_r si $|C|p_r^2 \leq \frac{\delta}{2}$, ou $p_r^2 \leq \frac{\delta}{2|C|}$ ou $\mu \leq (f_1(\mu) + \delta) \frac{\delta}{2|C|}$.

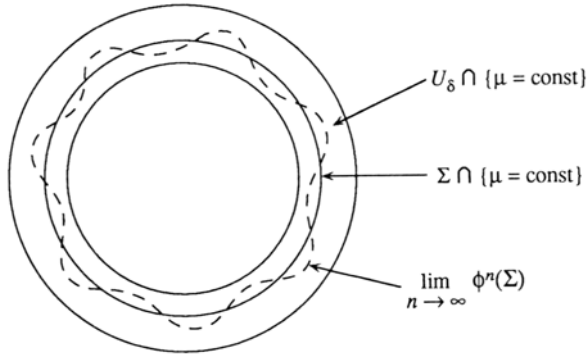
On établit facilement une borne μ_1 pour μ tel que des relations similaires à celle explicitée au-dessus soient uniformément satisfaites dans

$$U_{\delta, \mu_1} = U_\delta \cap \{0 < \mu < \mu_1\} : \phi(U_{\delta, \mu_1}) \subset U_{\delta, \mu_1}.$$

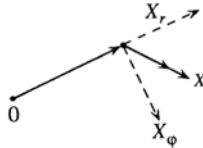
(3) Une conséquence particulière de (2) est que pour

$$\Sigma_{\mu_1} \equiv \Sigma \cap \{0 < \mu < \mu_1\}, \quad \phi^n(\Sigma_{\mu_1}) \subset U_\delta.$$

Nous considérons à présent un plan $\mu = \text{const.}$ $\mu < \mu_1$ dans l'espace (r, φ, μ) .



(4) Nous aimerions voir que $\Phi^n(\Sigma)$ a une limite lorsque n tend vers l'infini. Pour ceci, il est utile de regarder la "pente" des vecteurs tangents au plan $\mu = \text{const}$. Cette pente est définie comme suit : si $X = X_r \frac{\partial}{\partial r} + X_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$, alors la pente est $\left| \frac{X_r}{\mu \cdot X_\varphi} \right|$, si $X_\varphi = 0$, la pente n'est pas définie.



(5) Si la pente de X est inférieure à 1 et si $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$, alors la pente de $(dN\Phi)X$ est inférieure à $(1 - K\mu)$.

Remarque : Le vecteur X est donc aplati, c'est-à-dire qu'à la limite $n \rightarrow \infty$ on évitera des oscillations trop fortes.

Démonstration :

$$(dN\Phi)(X) = \begin{pmatrix} (1 + \mu) - 3r^2 f_1(\mu) & 0 \\ 2f_3(\mu)r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_\varphi \end{pmatrix}$$

et la pente est donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{[(1 + \mu) - 3f_1(\mu)r^2]x_r}{2f_3(\mu)r x_r + x_\varphi} \cdot \frac{1}{\mu} \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{x_r}{x_\varphi \mu} \right| \left| \frac{(1 + \mu) - 3f_1(\mu)r^2}{2f_3(\mu)\frac{x_r}{x_\varphi} r + 1} \right| = \left| \frac{x_r}{x_\varphi \mu} \right| Y. \end{aligned}$$

L'affirmation est démontrée si nous pouvons montrer que le deuxième terme est plus petit que $(1 - K\mu)$ pour μ assez petit.

$$\begin{aligned} Y & \leq \frac{(1 + \mu) - 3f_1(\mu)r^2}{1 - 2|f_3(\mu)|\mu r} \leq \frac{(1 + \mu) - 3f_1(\mu)\frac{\mu}{f_1(\mu) + \delta}}{1 - 2|f_3(\mu)|\mu r} \\ & \leq \frac{1 - \mu}{1 - 2|f_3(\mu)|\mu r} \quad \text{si} \quad \frac{f_1(\mu)}{f_1(\mu) + \delta} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\delta \leq \frac{f_1(\mu_1)}{2} \right). \end{aligned}$$

Le dénominateur peut être estimé comme suit :

$$\text{Si } f_4 = \sup_{0 < \mu < \mu_1} |f_3(\mu)|, \text{ alors } 1 - 2|f_3(\mu)|\mu r \geq 1 - \mu \text{ pour } \mu < \mu'_2, \quad \mu'_2 = \left(\frac{f_1(\mu) + \delta}{f_4} \right)^4.$$

Donc

$$\begin{aligned} Y & \leq \frac{1 - \mu}{1 - \mu^{5/4}} \leq (1 - K\mu) \quad \text{si } \mu < \mu_2 \\ \mu_2 & = \min(\mu'_2, (1 - K)^4 \mu_1) \quad (0 < K < 1). \end{aligned}$$

Ceci démontre (5).

(6) La propriété (5) est aussi valable pour $d\phi_\mu$, avec $\mu < \min(\mu_2, \mu_3) = \mu_4$.

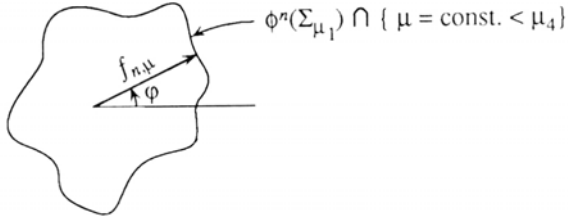
En effet ϕ et $N\phi$ ne se distinguent que par des termes d'ordre r^5 et ces termes peuvent être rendus arbitrairement petits par rapport aux termes d'ordre 0 à 4, si r est assez petit. Mais comme pour $r \in U_\delta$ $r \leq \mu^{1/2}/(f_1(\mu) - \delta)^{1/2}$ il est aussi possible de faire r^5 arbitrairement petit en posant $\mu < \mu_3$.

(7) Notez encore que la pente de Σ est nulle, donc la pente de $\phi_\mu^n \Sigma$ est plus petite que $(1 - K\mu)$ pour tous les n si $\mu < \mu_4$.

Nous définissons à présent $f_{n,\mu}(\varphi)$ par

$$\phi^n(\Sigma_{\mu_1}) \cap \{\mu = \text{const.} < \mu_4\} = \{f_{n,\mu}(\varphi), \varphi, \mu\}.$$

$f_{n,\mu}$ est donc le rayon de l'image de ϕ^n à l'angle φ .



La fonction $f_{n,\mu}$ est unique, si l'on exige que

$$f_{n,\mu}(\varphi) \in \left[\mu^{1/2} / (f_1(\mu) + \delta)^{1/2}, \mu^{1/2} / (f_1(\mu) - \delta)^{1/2} \right], \forall \varphi.$$

Par construction, $\left| \frac{df_{n,\mu}}{d\varphi} \right| \leq \mu$.

(8) Nous nous sommes intéressés à la limite de $f_{n,\mu}$ pour $n \rightarrow \infty$. Il n'est naturellement pas possible de dire quelque chose sur la limite de $f_{n,\mu}(\varphi)$ pour φ fixe puisque ϕ change non seulement le r , mais aussi le φ .

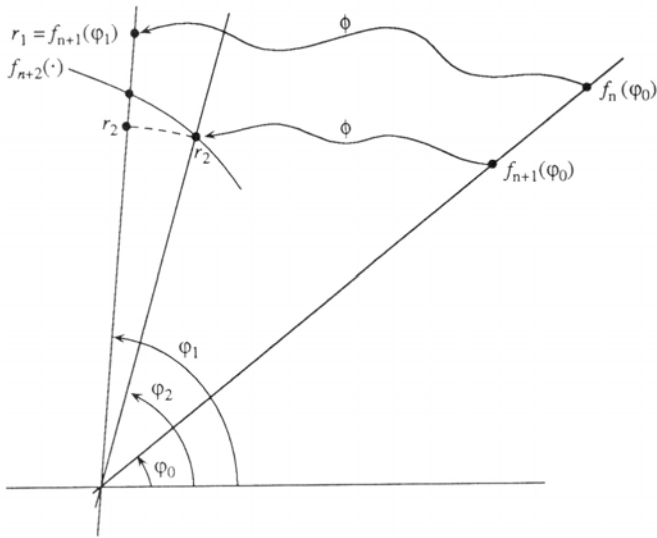
Cette difficulté nous amène à utiliser la construction suivante. Soit φ_0 donné, et

$$p_1 = (f_n(\varphi_0), \varphi_0, \mu) \quad , \quad p'_1 = \phi(p_1) = (r_1, \varphi_1, \mu)$$

$$p_2 = (f_{n+1}(\varphi_0), \varphi_0, \mu) \quad , \quad p'_2 = \phi(p_2) = (r_2, \varphi_2, \mu).$$

Nous voulons alors comparer $f_{n+2}(\varphi_1)$ à $f_{n+1}(\varphi_1) = r_1$.

La distance $|r_1 - f_{n+2}(\varphi_1)|$ va être estimée par de bornes sur $|r_1 - r_2|$ et la différence $|f_{n+2}(\varphi_1) - r_2|$, qui sera majorée en utilisant la majoration sur la pente de la courbe $f_{n+2}(\cdot)$.



Estimons $|r_1 - r_2|$. Soit $x_1 = f_{n,\mu}(\varphi_0)$, $x_2 = f_{n+1,\mu}(\varphi_0)$. Nous ne faisons l'estimation que pour l'application $N\phi$, le passage à ϕ étant toujours du même genre.

$$\begin{aligned} |N\phi(x_1)_r - N\phi(x_2)_r| &= \\ &= |(1 + \mu)(x_1 - x_2) - f_1(\mu)(x_1^3 - x_2^3)| = \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |(1 + \mu) - f_1(\mu)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)| = Y. \end{aligned}$$

Comme nous sommes en U_δ , $x_i^2 \geq \frac{\mu}{f_1(\mu) + \delta} \geq \frac{2\mu}{3f_1(\mu)}$, $i = 1, 2$ si $\delta \leq f_1(\mu)/2$. Donc

$$\begin{aligned} Y &\leq |x_1 - x_2| \left| 1 + \mu - \frac{2}{3} f_1(\mu) \frac{\mu}{f_1(\mu)} \cdot 3 \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| |1 - \mu| \quad (\mu < 1!). \end{aligned}$$

On a donc pour l'application $N\phi$

$$|r_1 - r_2| \leq (1 - \mu) |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)|.$$

et par une restriction $\mu < \min(\mu_4, \mu_5)$ on aura $|r_1 - r_2| \leq (1 - K_1\mu) |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)|$ pour l'application ϕ_μ .

Estimons $|\varphi_1 - \varphi_2|$, aussi pour $N\phi$ seulement.

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1 - \varphi_2| &= |\varphi_0 + f_2(\mu) + f_3(\mu)f_{n,\mu}^2(\varphi_0) - \varphi_0 - f_2(\mu) - f_3(\mu)f_{n+1,\mu}^2(\varphi_0)|^* \\
 &\leq |f_3(\mu)| |f_{n,\mu}^2(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}^2(\varphi_0)| \\
 &\leq |f_3(\mu)| |f_{n,\mu}(\varphi_0) + f_{n+1,\mu}(\varphi_0)| |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)| \\
 &\leq |f_3(\mu)| 2 \left(\frac{\mu}{f_1(\mu) - \delta} \right)^{1/2} |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)| \\
 &\leq \mu^{1/2} K_2 |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)|.
 \end{aligned}$$

Nous sommes donc prêts à estimer $|f_{n+1,\mu}(\varphi_1) - f_{n+2,\mu}(\varphi_1)|$ en utilisant encore la borne $\frac{d}{d\varphi}(f_{n+2,\mu}(\varphi)) \leq \mu$

$$\begin{aligned}
 |f_{n+1,\mu}(\varphi_1) - f_{n+2,\mu}(\varphi_1)| &\leq |r_1 - r_2| + |r_2 - f_{n+2,\mu}(\varphi_1)| \leq \\
 &\leq (1 - K_1\mu) |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)| + |\varphi_1 - \varphi_2| \sup_{\varphi} \left| \frac{d}{d\varphi} f_{n+2,\mu}(\varphi) \right| \leq \\
 &\leq |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)| \cdot \left[1 - K_1\mu + K_2\mu^{3/2} \right] \\
 &\leq K_3 |f_{n,\mu}(\varphi_0) - f_{n+1,\mu}(\varphi_0)|
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } K_3 < 1 \text{ si } \mu \leq \min \left(\mu_4, \mu_5, \mu_6, \left(\frac{K_1}{2K_2} \right)^2, \frac{1-K_3}{K_1/2} \right) = \mu_7.$$

↑

autres bornes antérieures

Ecrivant alors $\rho(n, n+1, \mu) = \max_{\varphi} (|f_{n,\mu}(\varphi) - f_{n+1,\mu}(\varphi)|)$ on a

$$\rho(n, n+1, \mu) \leq K_3^n \rho(0, 1, \mu) \quad \forall \mu < \mu_7 \text{ et } K_3 < 1.$$

Ceci démontre l'affirmation de (8) : Les courbes $f_{n,\mu}(\cdot)$ ont une limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

(9) Remarques :

- La famille des courbes $f_{\infty,\mu}$ est continue, puisque $f_{\infty,\mu}$ dépend continûment de μ grâce à la convergence uniforme.
- Si μ est fixé, $\mu < \mu_7$, $f_{\infty,\mu}$ n'est pas seulement continu mais même Lipschitz, parce que $f_{\infty,\mu}$ est la limite de fonctions à dérivée bornée (par μ).

Cette observation permet d'utiliser un résultat de Hirsch, Pugh et Shub [13] :

Si ϕ_{μ} est C^r pour chaque μ alors il existe un $0 < \mu_8 < \mu_7$ tel que $f_{\infty,\mu}$ est C^r pour $\mu < \mu_8$, $\mu = \text{const.}$

* Pardon : Ne pas confondre f_1, f_2 etc avec $f_{n\mu}(\varphi)$!

Cela vient du fait que près de $\mu = 0$, la contraction dans la direction r est plus forte que la contraction dans la direction φ . Remarquons encore que les "cercles" deviennent moins et moins différentiables lorsque $\mu \rightarrow \mu_7$; ce comportement est typique dans de telles situations.

- L'unicité de $f_{\infty, \mu}$ suit du caractère attractif de l'application ϕ près de Σ .

Ceci complète la démonstration du théorème 8.

6. Attracteurs étranges "près" d'un champ de vecteurs constant.

Dans cette section, nous allons construire un champ de vecteurs sur le tore T^k , $k = 3$, qui est voisin à un champ de vecteurs constant donné - voisin au sens de la norme C^{k-1} . Les points récurrents de ce champ vont former un ensemble de Cantor. En $k \geq 4$ dimensions on peut le construire de façon que cet ensemble soit attractif.

Théorème 9. *Soit ω un champ de vecteurs constant sur le tore $T^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$, $k \geq 3$. Dans tout voisinage C^{k-1} de ω il existe un ouvert de champs de vecteurs qui ne sont pas Morse-Smale, c'est-à-dire que leurs points récurrents ne constituent pas un nombre fini de points fixes et d'orbites fermées.*

Idée de démonstration :

Le tore peut être représenté par un cube dont on identifie les faces. Nous donnons sur une des faces un difféomorphisme qui a comme points récurrents un ensemble de Cantor (cf. aussi la page 8). On interprète cette application comme l'application de Poincaré d'un champ de vecteurs dans le cube. Il nous faut encore appliquer le cube sur le tore pour obtenir un champ de vecteurs qui est "presque" parallèle au champ de vecteurs constant ω . Ceci se fera en allongeant le cube (tout en conservant son volume) et de l'enrouler autour du tore.

Nous faisons un dessin en 2 dimensions. (Notez qu'en vérité les courbes intégrales ne se croisent pas en 3 dimensions.) La "face" du "cube" est alors l'intervalle $[0,1]$.

Le difféomorphisme applique $] \Rightarrow]$ en "croisant" les points de façon qu'on ait des points récurrents formant un ensemble de Cantor. La suspension en a l'aspect suivant :



Ceci est allongé



et on voit que les courbes sont presque parallèles. Il faut alors "tourner" le carré autour du tore de telle façon que le champ ainsi construit s'approche du champ donné ω .

Démonstration : Nous prenons $k = 3$.

Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et sans perte de généralité $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$. Nous approximations ω par un champ à composantes rationnelles (pour mieux pouvoir "tourner" le cube autour du tore).

(1) Etant donné $\varepsilon > 0$ on peut choisir ω' de telle façon que $\|\omega' - \omega\|_2 = \|\omega' - \omega\|_0 < \varepsilon/2$ et $\omega'_3 > 0$, $0 < \frac{\omega'_1}{\omega'_3} = \frac{p_1}{q_1} < 1$, $0 < \frac{\omega'_2}{\omega'_3} = \frac{p_2}{q_2} < 1$ ou p_i, q_i , $i = 1, 2$ sont des entiers et $p_1 q_2$ et $p_2 q_1$ n'ont pas de diviseur commun. En plus $\frac{1}{2} < q_1/q_2 < 2$.

Construction de p_1, p_2, q_1, q_2 :

Nous choisissons $q_1 = 2^{m_1}, q_2 = 3^{m_2}, p_1 = 5^{m_3}$. Soit $\omega'_3 = \omega_3$. Il existe m_1, m_3 tel que $\left| \frac{5^{m_3}}{2^{m_1}} - \frac{\omega_1}{\omega_3} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, et ceci est même vrai si l'on exige $m_1 > M$, où M sera déterminé après.

Il existe alors un m_2 tel que $\frac{1}{2} < 2^{m_1}/3^{m_2} < 2$; en effet il faut choisir m_2 : $\frac{(m_1-1)\log 2}{\log 3} < m_2 < \frac{(m_1+1)\log 2}{\log 3}$ (notez que $\frac{\log 2}{\log 3} \cdot 2 > 1$!).

Supposons que $M > \log(240/\varepsilon)/\log 2$ (Hourra !)

Alors $3^{m_2} \geq \frac{240}{\varepsilon}$. Utilisons à présent que dans chaque intervalle $m_1, m_1 + 1, \dots, m_1 + 29$ il y a au moins un nombre C tel que C n'a pas de diviseur 2,3,5.

On choisit alors C' de telle façon que

$$\left| \frac{C'}{3^{m_2}} - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}, \text{ ceci est possible puisque } 3^{m_2} \geq 240/\varepsilon.$$

Pour obtenir un nombre C qui n'a pas de diviseur 2,3,5, il faut changer C' au plus par 29. On trouve donc

$$\left| \frac{C}{3^{m_2}} - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right| \leq \left| \frac{C'}{3^{m_2}} - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right| + \left| \frac{29}{3^{m_2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \frac{\varepsilon}{4}.$$

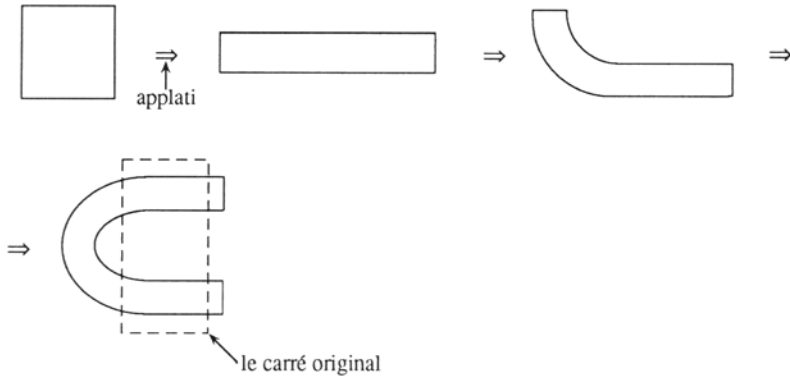
Ceci termine la construction.

(2) L'application de la face en soi-même. Nous définissons une application de

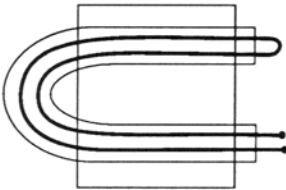
$$\Delta(0) \text{ en } \Delta(1), \Delta(x_3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3), \frac{1}{3} < x_i < \frac{2}{3}, i = 1, 2 \right\},$$

qui est appelée "difféomorphisme du fer à cheval" (horseshoe) (cf. Smale). Nous nous

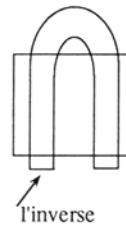
abstiendrons de définir ce difféomorphisme en formules, mais nous le dessinons



l'itéré de cette application donne



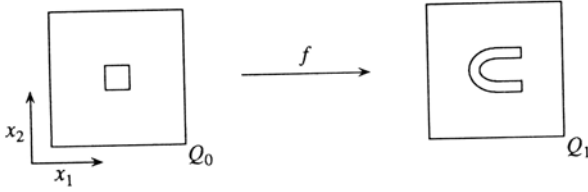
et l'inverse donne



Un argument comme à la page 9 montre que l'ensemble des points récurrents est un ensemble de Cantor.

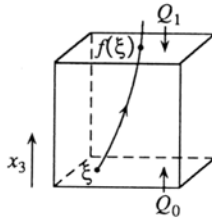
Remarque : Il existe des points périodiques de n'importe quelle période donnée (cf. Smale pour des détails).

(3) Définition du champ de vecteurs dans le cube. Soit $f(\xi)$ l'application construite sous (2), et complétée à un difféomorphisme du carré unité de telle façon que les voisinages des bords du carré soient fixes.



Nous construisons alors un champ de vecteurs.

$$X = (\tilde{X}, 1) \text{ tel que } \mathcal{D}_{X,1}(\xi, 0) = (f(\xi), 1)$$



(4) Nous allons à présent appliquer le cube unité sur le tore T^3 (identification des faces).* Soit g l'application naturelle du cube sur le tore

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \text{ (sur le tore)}$$

et $h(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{q_1} + p_1 q_2 x_3 \pmod{1}, \frac{x_2}{q_2} + p_2 q_1 x_3 \pmod{1}, q_1, q_2 x_3 \pmod{1} \right)$. Notez que h préserve le volume. Soit I^3 le cube unité. Alors $gI^3 = T^3$, par définition, mais aussi $hI^3 = T^3$ et il existe une application unique inverse h^{-1} sur le cube I^3 ouvert** (et naturellement aussi g^{-1}).

En effet, si $h(x_1, x_2, x_3) = h(y_1, y_2, y_3)$, il suit $x_i = y_i, i = 1, \dots, 3$.

Démonstration : Nous avons $q_1 q_2 x_3 = q_1 q_2 y_3 \pmod{1}$, donc

$$x_3 - y_3 = n/q_1 q_2.$$

Nous avons aussi

$$\frac{x_1}{q_1} - \frac{y_1}{q_1} + p_1 q_2 (x_3 - y_3) \pmod{1} = 0$$

* Cette identification est possible puisque le champ X est constant sur $\partial Q_0 \times [0, 1]$.

** (seulement sur le cube ouvert, parce que les faces doivent être identifiées d'une façon compliquée selon h).

donc

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - y_1}{q_1} + p_1 q_2 (x_3 - y_3) + n' &= 0 \\ \text{ou } x_1 - y_1 + p_1 q_1 q_2 (x_3 - y_3) + q_1 n' &= 0 \\ \text{ou } x_1 - y_1 + p_1 n + q_1 n' &= 0, \end{aligned}$$

mais comme p_1 et q_1 n'ont pas de diviseur commun, il suit $n = n' = 0$, $x_1 = y_1$, et $x_3 = y_3$. L'argument pour x_2 et y_2 est analogue.

Q.E.D.

(5) Construction du champ de vecteurs Z proche de ω^1 .

Soit $\phi(x) = h \circ g^{-1}(x)$, ϕ est univoquement déterminé. Nous définissons $Y(\phi(x)) = [d\phi(x)]X(x)$ où X est le champ de vecteurs construit sous (4) et

$$[d\phi(x)] = \begin{pmatrix} q_1^{-1} & 0 & p_1 q_2 \\ 0 & q_2^{-1} & p_2 q_1 \\ 0 & 0 & q_1 q_2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Soit $Z = (q_1 q_2)^{-1} \omega'_3 Y$. Nous devons estimer

$$\begin{aligned} \|Z - \omega^1\|_2 &= \sup_{\rho, |\rho| \leq 2} N^\rho; \\ N^\rho &= \sup_{y \in T^3} \sup_{i=1,2,3} |D^\rho Z_i(y) - D^\rho \omega'_i|. \end{aligned} \quad (*)$$

D^ρ est une différentiation d'ordre ρ . Nous voulons prendre le \sup dans le cube I^3 , c'est-à-dire $\sup_{y \in hI^3}$, $y = \phi x$ $x \in T^3$. On peut donc revenir aux variables du cube en utilisant :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ -p_1 & -p_2 & (q_1 q_2)^{-1} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}$$

(inverse transposée de la matrice (**)) et donc

$$\sup_i \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \right| < (q_1 + q_2) \sup_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \right|.$$

Calculons alors $Z_i(y) - \omega'_i$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_1(y) - \omega'_1 \\ Z_2(y) - \omega'_2 \\ Z_3(y) - \omega'_3 \end{pmatrix} &= (q_1 q_2)^{-1} \omega'_3 \begin{pmatrix} q_1^{-1} X_1 + p_1 q_2 \\ q_2^{-1} X_2 + p_2 q_1 \\ q_1 q_2 \end{pmatrix} - \omega'_3 \begin{pmatrix} p_1 q_1^{-1} \\ p_2 q_2^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (q_1 q_2)^{-1} \omega'_3 \begin{pmatrix} q_1^{-1} X_1 \\ q_2^{-1} X_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(nous avons utilisé $X_3 = 1$ (par construction)).

On a donc :

$$N^\rho \leq (q_1 q_2)^{-1} \omega'_3 (q_1 + q_2)^{|\rho|} \sup_{i=1,2} \left(\frac{1}{q_i} \right) \|X_i\|_{|\rho|}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \|Z - \omega'\|_2 &\leq (q_1 q_2)^{-2} (q_1 + q_2)^{2+1} [\omega'_3 \|X\|_2] \\ &\leq (2q_1)^{-2} (3q_1)^3 [\omega'_3 \|X\|_2] \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

si $q_1 > M'$. Nous ajustons donc la constante M de la page 37 en conséquence. (Nous avons aussi utilisé $\frac{1}{2} < q_1/q_2$). Ceci complète la démonstration du théorème 9, puisque la stabilité de l'ensemble de Cantor suit comme à la page 10.

(6) Remarques : La généralisation à $k > 3$ dimensions est immédiate par un choix de plusieurs nombres premiers. En remplaçant le horse-shoe difféomorphisme par l'application d'un 3-tore en soi-même comme à la page 9-10, on obtient même le résultat

COROLLAIRE 10. *Soit ω un champ de vecteurs constant sur T^k , $k \geq 4$. Dans chaque voisinage C^{k-1} de ω , il existe un ouvert de champs de vecteurs avec attracteurs étranges.*

III. Applications

7. Bifurcation de solutions stationnaires.

Dans cette section, nous aimerions appliquer les résultats du chapitre précédent à la bifurcation des solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes. Ceci veut dire que nous cherchons des solutions x de $X_\mu(x) = 0$.

L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p + \nu \Delta u_i + F_i \quad (1)$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_j = 0. \quad (2)$$

Si l'on tient compte de la diffusion de chaleur (mais non pas de la production de chaleur par le frottement), alors on a l'équation

$$\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} T = K \Delta T. \quad (3)$$

Nous verrons plus tard qu'à cause de la condition (2) le terme dû à la pression et d'autres termes gradients disparaissent.

Le terme F_i (la force) est une fonction de la position x et de $v(x)$, $T(x)$. Nous voulons tenir compte en particulier des effets gravitationnels dûs aux différences de densité causées par les différences de température. Dans l'approximation de Boussinesq ceci s'écrit

$$F_i = (1 - \alpha(T - \bar{T}))g_i \quad (4)$$

où g_i est le vecteur de l'accélération gravitationnelle. \bar{T} est une constante arbitraire qui n'influence pas la solution de l'équation comme nous verrons plus tard.

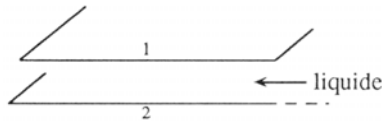
Les équations (1) et (3) sont encore complétées de conditions aux limites : ceci revient à fixer la vitesse v et la température T au bord du volume occupé par le fluide. Le paramètre de bifurcation apparaît dans ces conditions aux limites (vitesse angulaire du cylindre, température etc.) et dans le terme F .

Nous *supposons* qu'on connaît une solution particulière (u_j^0, T_j^0) de (1) - (4) satisfaisant aux conditions aux limites. On peut alors travailler avec l'équation pour $u' = u - u^0$, $T' = T - T^0$ avec des conditions aux limites plus simples.

Il est peut-être utile de rappeler qu'il existe des situations où on connaît vraiment une solution. Voici quelques exemples :

- 1) Le problème de Taylor (flot de Couette). Cette situation a été décrite à la page 1. La solution à laquelle nous faisons allusion est celle où le fluide fait une simple rotation autour du cylindre intérieur, sa vitesse ne dépendant que de la distance de l'axe.
- 2) Le problème de Bénard.

On a une couche de liquide qui se trouve entre deux plans parallèles infinis.



Le plan 2 est chauffé, le plan 1 est refroidi. Il y a une solution où le liquide est au repos mais où sa température varie en fonction de la distance du plan 2.

Remarque : *Les deux systèmes décrits ont une symétrie (axe des cylindres, translations des deux plans). Il est important de noter que ce fait peut changer le caractère de généralité d'un point critique. Ce problème sera discuté à la section 8.*

Le but de notre étude sera de trouver quelques propriétés sur le spectre de la partie linéaire de l'équation pour u' et T' .

Notons d'abord cette équation :

Si u^0, T^0 est une solution de (1) à (4) et si $u' = u - u^0$, $T' = T - T^0$ alors les équations pour u' et T' sont :

$$\begin{aligned} \Delta u'_j &= \frac{1}{\nu} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (p - p_0) + \sum_{k=1}^3 \left(u_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} u'_j + u'_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j^0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha T' g_j + \sum_{k=1}^3 u'_k \frac{\partial}{\partial x_k} u'_j \right] \\ \Delta T' &= \frac{1}{k} \left[\sum_{k=1}^3 \left(u_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} T' + u'_k \frac{\partial}{\partial x_k} T^0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^3 u'_k \frac{\partial}{\partial x_k} T' \right] \end{aligned} \quad (5)$$

avec la condition $u' = 0$, $T' = 0$ sur le bord ∂D de D . Il faut choisir astucieusement un espace, dans lequel la partie droite de (5) fait un sens.

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert des fonctions $(U, T) : D \rightarrow \mathbf{R}^4$ qui sont de carré intégrable et qui ont des dérivées premières de carrés intégrables. Soit H la fermeture en \mathcal{H} de l'espace \tilde{H} des fonctions \tilde{u}, \tilde{T} différentiables à support compact et satisfaisant à $\sum_{j=1}^3 \partial \tilde{u}_j / \partial x_j = 0$.

Soit Λ la plus petite valeur propre de $-\Delta$ avec conditions zéro aux limites dans D . Nous supposons que $\Lambda > 0$. Il est connu que $\Lambda > 0$ pour des régions bornées ou des "bandes" (comme dans l'exemple 2)). Le fait que $\Lambda > 0$ est utilisé pour introduire une nouvelle norme dans H : En effet, si φ est différentiable à support compact en D , alors

$$\int_D dx \varphi^2 \leq \frac{1}{\Lambda} \int_D dx \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2. \quad (7)$$

En vue de ceci, la norme originale de \mathcal{H} , donnée par

$$\int dx \sum_{j=1}^3 u_j^2(x) + T^2(x) + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2(x) + \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2(x)$$

est équivalente à la norme de Dirichlet

$$\|(u, T)\| = \left[\int_D \sum_{k=1}^3 \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2(x) + \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2(x) \right] dx \right]^{1/2} = ((u, T), (u, T))^{1/2}.$$

C'est cette norme que nous utiliserons dans la suite.

Nous considérons maintenant des solutions de (5) dans le sens faible : Nous voulons que (5) soit vrai avec la condition $u' = T' = 0$ sur ∂D après multiplication avec un $(\varphi, \theta) \in \tilde{H}$ quelconque et après intégration.

Ceci nous donne l'équation

$$\begin{aligned}
\langle (\varphi, \theta), (u', T') \rangle &= \int_D dx \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Delta u'_j + \theta \Delta T = \\
&= \int_D dx \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_j \right) \cdot (u'_k u'_j + u'_k u'_j) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \theta \right) (u'_k T' + u'_k T') \right] - \frac{\alpha}{\nu} \sum_{j=1}^3 \varphi_j g_j T' \right\} + \\
&+ \int_D dx \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_j \right) u'_k u'_j + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \theta \right) u'_k T' \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Nous avons fait passer les différentiations sur les fonctions φ et θ ; le terme $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (p - p_0)$ disparaît ainsi. La première intégrale dans (6) est linéaire en u', T' , la deuxième est quadratique.

Nous supposons que u_j^0 et $T^0 \in L^4(D)$; les deux intégrales dans (6) peuvent alors être écrites comme

$$\langle (\varphi, \theta), L(u', T') \rangle \quad \text{et} \quad \langle (\varphi, \theta), Q(u', T') \rangle$$

où L et Q sont des opérateurs continus linéaires et quadratiques sur H respectivement. Nous allons à présent montrer ce fait.

Lemme : Si φ est C^∞ et de support compact, alors

$$\int \varphi^4 dx \leq 4 \left[\int dx \varphi^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int dx \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

(Ceci est une inégalité du type de Sobolew. Il faut utiliser le nombre de dimensions d'espace.)

A cause de (7) il suit que

$$\int \varphi^4 dx \leq \frac{4}{\sqrt{\Lambda}} \left[\int dx \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right]^2. \quad (8a)$$

où nous avons donc utilisé la restriction sur D mentionnée à la fin de la page 43.

Regardons alors un terme typique de (6) :

Lemme : Soient $\varphi, \psi \in C^\infty$ à support compact dans D et $u_i \in L^4(D)$, ou $\varphi, u_i \in C^\infty$ à support compact dans D et $\psi \in L^4(D)$. Alors

$$\begin{aligned} & \left| \int dx \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u_j \psi \right| \leq \\ & \leq \left[\int dx \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\int dx \sum_{j=1}^3 u_j^2 \psi^2 \right]^{1/2} \leq \\ & \leq \left[\int dx \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\int dx u_j^4 \right]^{1/4} \left[3 \int dx \psi^4 \right]^{1/4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Nous avons utilisé l'inégalité de Schwartz.

Grâce à (9) il y a une injection naturelle de H dans l'espace de Hilbert des fonctions $D \rightarrow \mathbf{R}^4$ de carrés sommables et grâce à (8) il y a une injection naturelle dans l'espace des fonctions L^4 de $D \rightarrow \mathbf{R}^4$. Si D est bornée, ces injections sont complètement continues (Théorème de Rellich et par (8)), il en suit que L et Q sont complètement continus.

Notre conclusion finale est la suivante : Si (u^0, T^0) est dans l'espace L^4 des fonctions $D \rightarrow \mathbf{R}^4$, et si D est bornée, l'équation (6) peut être réécrite comme

$$x = Lx + Qx$$

dans l'espace H , et L est linéaire et complètement continu (et donc de spectre discret) et Q est quadratique et continu.

Nous avons donc établi une propriété sur le spectre de L dont nous aurons besoin dans le théorème suivant. Nous allons d'abord énoncer le théorème et ensuite nous l'appliquerons au flot de Couette.

Théorème 11 : Soit H un espace de Banach avec norme C^k , $2 \leq k < \infty$ et ϕ_μ un difféomorphisme de H tel que $\phi_\mu(0) = 0$ et $(x, \mu) \rightarrow \phi_\mu(x)$ est C^k de $H \times \mathbf{R}$ dans H . Soit

$$L_\mu = [d\phi_\mu]_0, \quad N_\mu = \phi_\mu - L_\mu.$$

On suppose que L_μ a une valeur propre simple $\lambda_{(\mu)}$, isolée et dépendant continûment de μ , telle que $\lambda(0) = 1$ et $(d\lambda/d\mu)(0) > 0$. On suppose que le reste du spectre se trouve à l'intérieur du cercle unité $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Sous ces hypothèses, on peut tirer les conclusions suivantes :

(a) Il existe une famille à un paramètre (une courbe ℓ de classe C^{k-1}) de points fixes de $\phi : (x, \mu) \rightarrow (\phi_\mu(x), \mu)$, près de $(0, 0)$ dans $H \times \mathbf{R}$. Les points fixes et $(0, \mu)$ sont les seuls points fixes de ϕ dans un voisinage de $(0, 0)$.

(b) Soit z (resp. z^*) un vecteur propre de L_0 (resp. de son adjoint L_0^* dans le dual H^* de H) à valeur propre 1, tel que $(z^*, z) = 1$. Supposons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(z^*, N_0 \alpha z) = 0. \quad (11)$$

Dans ce cas, la courbe ℓ de (a) est tangente à $(z, 0)$ en $(0, 0)$.

Démonstration : Nous utilisons le théorème de la variété centrale. ϕ a deux vecteurs propres à valeur propre 1, ce sont $(z, 0)$ et $(0, 1)$. Il existe donc une variété à deux dimensions, V^c , qui est tangente à $(z, 0)$ et à $(0, 1)$ en $(0, 0) \in H \times \mathbb{R}$. V^c est invariante sous ϕ et contient tous les points fixes de ϕ dans un voisinage de $(0, 0)$.

Appliquons alors la machinerie habituelle : On choisit des coordonnées (α, μ) en V^c telles que

$$\phi(\alpha, \mu) = (f(\alpha, \mu), \mu)$$

où f est une fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(0, \mu) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, \mu) = \lambda(\mu)$. Les points fixes de ϕ dans V^c sont alors donnés par les solutions de $\alpha = f(\alpha, \mu)$. On a d'abord les solutions évidentes $(\alpha = 0, \mu)$. Pour trouver d'autres solutions, on considère la fonction

$$g(\alpha, \mu) = f(\alpha, \mu)/\alpha - 1$$

dont il faut chercher les zéros. Par le théorème de division, g est C^{k-1} . Par construction $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{d\lambda}{d\mu}(0) > 0$. Le théorème des fonctions implicites nous fournit alors (a).

Il nous reste à montrer (b). Soit $(x, 0) \in V^c$. On peut décomposer $x = \alpha z + y$, où $(z^*, y) = 0$. Puisque V^c est tangente à $(z, 0)$, on trouve que

$$x = \alpha z + O(\alpha^2) \quad \text{ou} \quad y = O(\alpha^2).$$

Puisque $(z^*, z) = 1$ on a

$$\begin{aligned} f(\alpha, 0) &= (z^*, \phi_0(\alpha z + y)) \\ &= (z^*, L_0 \alpha z + L_0 y + N_0(\alpha z + y)) \\ &= \alpha + (z^*, L_0 y + N_0(\alpha z + y)) \\ &= \alpha + (z^*, L_0 y + N_0 \alpha z) + O(\alpha^3). \end{aligned}$$

(Nous avons utilisé que $y = O(\alpha^2)$ et que N_0 n'est pas linéaire). Par hypothèse $(z^*, N_0 \alpha z) = 0$ et par construction

$$(z^*, L_0 y) = (L_0^* z^*, y) = (z^*, y) = 0.$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} f(\alpha, 0) &= \alpha + O(\alpha^3) \quad \text{et} \\ f(\alpha, \mu) &= \alpha(\lambda(\mu) + O^2) \end{aligned} \quad (12)$$

où O^2 sont des termes d'ordre 2 en μ et α . La courbe des points fixes de ϕ introduite sous (a) est alors donnée par

$$\lambda(\mu) + O^2 = 1. \quad (13)$$

Ceci implique (en approximant $\lambda(\mu) = \lambda(0) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\right)(0)\cdot\mu + O(\mu^2)$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\right)(0)\mu &= O^2 \quad \text{et donc} \\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\right)(0)\cdot\mu &= O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$(\mu(\alpha) \sim \alpha\cdot\mu(\alpha) + \mu(\alpha)^2 + \alpha^2 \Rightarrow \mu(\alpha) \sim \alpha^2 + O(\alpha^3).)$$

Mais (14) signifie que $\mu = O(\alpha^2)$ sur la courbe ℓ qui est donc tangente à $(z, 0)$.

Ceci complète la démonstration du théorème. Il est possible de pousser l'analyse de la courbe ℓ un peu plus loin :

Il suit de (11) et de l'invariance locale de V^c que

$$\phi_0(\alpha z + y) = \alpha z + y + O(\alpha^3).$$

(Cf. aussi page 46 en haut.) Par définition

$$\phi_0(\alpha z + y) = \alpha L_0 z + L_0 y + N_0(\alpha z) + O(\alpha^3)$$

et donc on a en combinant les deux expressions pour ϕ_0

$$\begin{aligned} y &= L_0 y + N_0(\alpha z) + O(\alpha^3) \quad \text{ou} \\ y &= (1 - L_0)^{-1} N_0(\alpha z) + O(\alpha^3). \end{aligned}$$

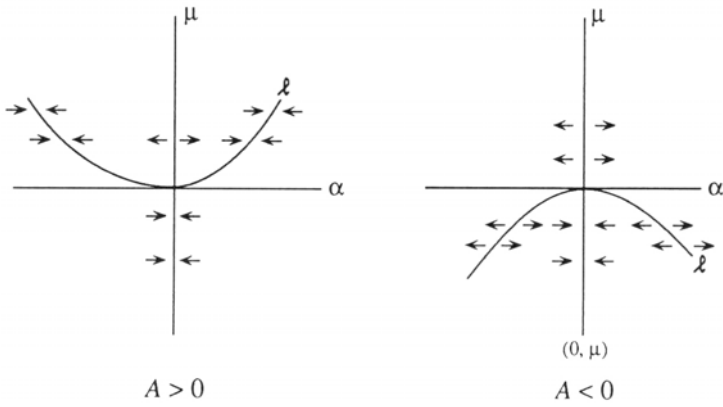
On peut donc améliorer (12)

$$f(\alpha, 0) = \alpha + (z^*, N_0(\alpha z + (1 - L_0)^{-1} N_0(\alpha z))) + O(\alpha^4).$$

On peut alors calculer le coefficient A de α^3 de $f(\alpha, 0)$. (14) devient alors, à des termes d'ordre supérieur près

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}(0)\right]\mu + A\alpha^2 = 0.$$

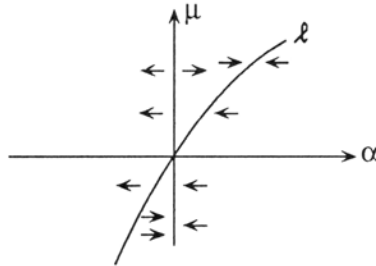
On peut alors décrire le comportement de la courbe ℓ près de $(0, 0)$.



Les flèches indiquent le caractère attractif ou répulsif des courbes.

Remarques :

- Si la courbe ℓ n'est pas tangente à $(z, 0)$ (condition (11) pas satisfaite) alors on a l'image suivante :



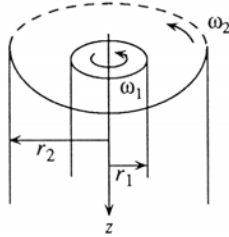
- Si on ne suppose pas que le reste du spectre se trouve dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mais seulement dans $\{z \in \mathbb{C}, |z| \neq 1\}$ le théorème reste valable mais on perd les résultats sur le caractère attractif des points fixes.
- Ces résultats sont d'un type bien connu, mais ils ont la particularité de montrer en plus que les points fixes dépendent de manière différentiable du paramètre de bifurcation.

L'instabilité de Taylor du flot de Couette [Cf. p. ex. C.C. Lin, *Hydrodynamical Stability*.]

Les équations pour une déviation stationnaire du flot de Couette sont de la forme

$$u = R(Lu + Qu)$$

dans un espace de Hilbert H de champs de vecteurs u entre les deux cylindres. Ici R est le nombre de Reynold, L un opérateur compact ($H \rightarrow H$) linéaire, et Q un opérateur compact quadratique. En plus on a imposé une symétrie rotationnelle de u .



Si $\omega_1 > 0$, $\omega_2 \geq 0$ et $\omega_1 r_1^2 > \omega_2 r_2^2$ alors on trouve que pour toutes* les valeurs de la période des solutions dans la direction de l'axe de z , le spectre de L consiste de valeurs propres réelles, positives et simples. Soit λ_1 la valeur propre maximale de L . Soit alors $k \geq 2$. Nous considérons l'application $C^k \quad H \times \mathbb{R} \rightarrow H \times \mathbb{R}$ définie par

$$(u, R) \rightarrow (R \cdot (Lu + Qu), R).$$

Le point fixe $(0, \lambda_1^{-1})$ a alors une variété centrale à deux dimensions et on trouve par le théorème 11 une famille à un paramètre de points fixes.

8. Points critiques d'un champ de vecteurs en présence d'un groupe d'invariance.

Notre discussion de la bifurcation pour un système donné que nous avons menée au chapitre I était en partie basée sur le concept de *généricité* des points critique, c'est-à-dire qu'on décidait, par exemple, (page 13) que le cas où une valeur propre réelle simple traverse l'origine était non-générique. Constructivement ceci dit que l'on peut changer l'équation en question de très peu pour obtenir une autre situation.

Si l'on impose à l'équation en question une invariance sous un groupe il se peut que les changements nécessaires pour partir d'une situation particulière (par exemple une valeur propre réelle traversant zéro) sont incompatibles avec les restrictions imposées par l'invariance de l'équation sous le groupe donné.

* à un ensemble dénombrable de périodes près

La conclusion de cette discussion est que

l'invariance sous un groupe peut changer le caractère générique d'un point critique.

Dans cette section, nous discuterons quelques exemples. Soit \mathcal{X} un espace de Hilbert réel et U une représentation linéaire orthogonale du groupe G dans \mathcal{X} . Nous identifierons l'espace tangent de \mathcal{X} à \mathcal{X} . La condition d'invariance s'écrit

$$X(U(g)x) = U(g)X(x),$$

où $x \in \mathcal{X}$, X un champ de vecteurs.

On trouve par un calcul simple que la matrice Jacobienne

$$A_j^i = \frac{\partial X^j}{\partial x^k}(0)$$

satisfait à $U(g)A = AU(g)(*)$. Le champ linéaire associé à A est invariant par U et ceci implique que $(*)$ est la seule restriction sur la matrice Jacobienne provenant de l'invariance du champ. Si 0 est un point critique ($X(0) = 0$) sa nature va être restreinte par $(*)$.

Nous donnons maintenant des exemples.

Exemple I.

Soit G le groupe multiplicatif à 2 éléments notés $\{1, -1\}$. Soit \mathcal{X} de dimension finie. Soit $\varepsilon = \pm 1$. On peut réduire $\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-$ tel que $U(\varepsilon) = U_+(\varepsilon) \oplus U_-(\varepsilon)$. Ici U_+ est la représentation triviale, U_- la représentation fidèle.

La condition d'invariance s'écrit

$$X(U(-1)x) = U(-1)X(x). \quad (*)$$

Il s'en suit que $X(0)$ applique dans \mathcal{X}_+ et non pas dans \mathcal{X}_- . Nous supposons $\mathcal{X}_+ = 0$, d'où on a que 0 est un point critique de X et aussi que $(*)$ devient

$$X(-x) = -X(x).$$

La matrice Jacobienne n'est soumise à aucune restriction par la condition d'invariance. On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème : Soit $G = \{+1, -1\}$ et $U(\pm 1)x = \pm x$ pour $x \in \mathcal{X}$. Soit $F : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ continu et soit $F(-x, \mu) = -F(x, \mu)$. Soit $A(\mu)$ la matrice Jacobienne de $F(\mu)$. Si μ est dans un voisinage de 0 , nous supposons que $\lambda(\mu)$ est une valeur simple de $A(\mu)$ dépendant continûment de μ et $\lambda(0) = 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}(0) > 0$. Nous supposons en plus que 0 est la seule valeur propre réelle de $A(0)$.

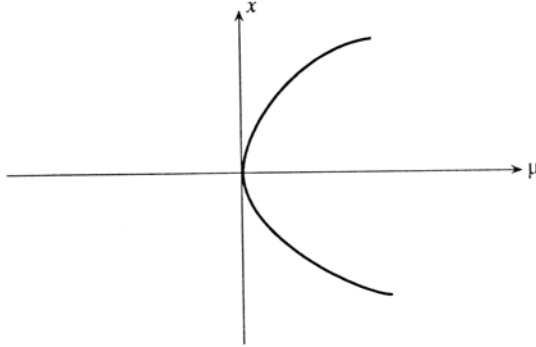
Sous ces conditions, il existe un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ tel qu'il existe une famille à un paramètre de points critiques :

$$\tau \rightarrow (x(\tau), \mu(\tau)).$$

$x(\cdot)$ et $\mu(\cdot)$ sont continues, $x(\tau) = -x(-\tau)$, $\mu(\tau) = \mu(-\tau)$. Il n'y a pas d'autres points récurrents que $(x(\tau), \mu(\tau))$ et que $(0, 0)$ dans le voisinage de $(0, 0)$.

Pour la démonstration on utilise le théorème de la variété centrale ; on travaille ensuite en deux dimensions et on applique le théorème des fonctions implicites.

Les points critiques :



On a donc une bifurcation des points critiques qui n'était pas présente génériquement au cas sans invariance sous G .

Exemple II.

Ici G est le groupe additif des réels. Soit \mathcal{X} de dimension finie, la représentation U est complètement réductible et consiste en des composantes irréductibles du type suivant :

(a) Si $\tau \in G$, il y a des représentations à 2 dimensions V_α ,

$$V_\alpha(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \tau & -\sin \alpha \tau \\ \sin \alpha \tau & \cos \alpha \tau \end{pmatrix} \quad \alpha > 0$$

et

(b) $V_0(\tau) = 1$, (uni-dimensionnel).

On a donc

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha > 0} \mathcal{X}_\alpha \right), \quad \mathcal{X}_\alpha = \mathbb{R}^2 \otimes \mathcal{Y}_\alpha$$

tel que si U_0 , U_α sont les restrictions de U à \mathcal{X}_0 , \mathcal{X}_α , alors

$$U_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_0} \quad U_\alpha = V_\alpha \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_\alpha}.$$

De la condition $X(U(\tau)x) = U(\tau) X(x)$ il suit que $X : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$, et aussi que la matrice Jacobienne A de X se réduit

$$A = A_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha > 0} A_\alpha \right)$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} B_\alpha & -C_\alpha \\ C_\alpha & B_\alpha \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_\alpha}.$$

On a alors le résultat suivant :

Soit $X_0 = 0$. Alors 0 est un point critique de chaque champ X invariant par G . Génériquement, les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont tous non-réels.

Ce résultat suit du fait que les valeurs propres de $\begin{pmatrix} B_\alpha & -C_\alpha \\ C_\alpha & B_\alpha \end{pmatrix}$ sont $B_\alpha + iC_\alpha$ et que, génériquement, $C_\alpha \neq 0$.

References

- [1] J. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *J. Math. Pures et Appl.* **4**, 27-73 (1898).
- [2] H. Poincaré, *Science et méthode*. Ernest Flammarion, Paris, 1908.
- [3] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 130-141 (1963).
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1959.
- [5] D. Ruelle, *Chance and chaos*. Princeton University Press, Princeton N.J., 1991.
- [6] P. Bergé, Y. Pomeau and Ch. Vidal, *Order within chaos*. J. Wiley, New York, 1987.
- [7] Ia. G. Sinai, Gibbs measures in ergodic theory. *Uspekhi Mat. Nauk* **27** N° 4, 21-64 (1972). English translation: *Russian Math. Surveys* **27** N° 4, 21-69 (1972).
- [8] G. Gallavotti and E.G.D. Cohen, Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics. Preprint.
- [9] Ya. B. Pesin, Invariant manifold families which correspond to nonvanishing characteristic exponents. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **40** N° 6, 1332-1379 (1976). English translation: *Math. USSR Izv.* N° 6, 1261-1305 (1976).
- [10] Ya. B. Pesin, Lyapunov characteristic exponents and smooth ergodic theory. *Uspekhi Mat. Nauk* **32** N° 4 (196), 55-112 (1977). English translation: *Russian Math. Surveys* **32** N° 4, 55-114 (1977).
- [11] F. Ledrappier and L.S. Young, The metric entropy of diffeomorphisms. Part I, Characterization of measures satisfying Pesin's formula. Part II, Relations between entropy, exponents and dimension. *Ann. of Math.* **122**, 509-539, 540-574 (1985).
- [12] J. Milnor, On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.* **99**, 177-195 (1985), and **102**, 517-519 (1985).
- [13] L. Onsager, Statistical hydrodynamics. *Suppl. Nuovo Cim.* **6**, 279-287 (1949).

- [14] M. Campanino and H. Epstein, On the existence of Feigenbaum's fixed point. *Commun. Math. Phys.* **79**, 261–302 (1981).
- [15] M. Widom, D. Bensimon, L. Kadanoff and S. Shenker, Strange objects in the complex plane. *J. Statist. Phys.* **32**, 443–454 (1983).
- [16] M. Pollicott, A complex Ruelle-Perron-Frobenius theorem and two counterexamples. *Ergod. Th. and Dynam. Syst.* **4**, 135–146 (1984).
- [17] T.S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions*. 2nd ed., University of Chicago Press, Chicago, 1970.
- [18] V.I. Arnol'd, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Uspekhi Mat. Nauk* **18** N° 6, 91–192 (1963). English translation: *Russian Math. Surveys* **18** N° 6, 85–193 (1963).
- [19] J. Wisdom, Chaotic behavior in the solar system. *Proc. Royal Soc.* **413** A, 109–129 (1987).
- [20] J. Laskar, Large scale chaos and marginal stability in the solar system. *Proc. of the XI-th IAMP conference* (1994). To appear.
- [21] T. Li and J.A. Yorke, Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* **82**, 985–992 (1975).
- [22] J. Gleick, *Chaos*. Viking, New York, 1987.